基于凸体堆积密度的 *Heilbronn* 问题分析

参赛队员　顾理

指导老师　陈文俊

参赛学校　上海外国语大学附属外国语学校

省份　上海市

国家　中国

创新性申明：

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员：顾理　　　　　　　　　　　指导老师：陈文俊

2019　年　8　月　31　日

目录

引言......4
一．问题及预备知识......5
问题 1......5
问题 2......5
问题 3......5
问题 4......5
二．问题 1 上下界的估计......6
引理 1.1......6
引理 1.2......6
引理 1.3:......6
引理 1.4:......7
引理 1.5:......8
引理 1.6......9
定理 1：......10
推论 1......11
三. 问题 3 的参数估计......11
引理 2.1......11
引理 2.2......12
引理 2.3......14
定理 2:......16
四．问题 4 的参数估计......17
定理 3:......17
参考文献：......18
附录 1：......19
附录 2：......20

引言

单墫老师在文[1]中提及第一节所述组合几何**问题** 1,实际上,此问题是 1961 年匈牙利竞赛题,在 $n=4$ 时,时常作为高联赛训练题,这类问题的一般解决过程较为复杂,即使在 $n\le 10$ 时,其难度也不可言喻,文[3],[6],[7]中李文琦,熊斌,杜锡禄,科大李文志等人对**问题** 1 进行确界估计,取得了一些有效的结果.杜锡禄还在文[3]中提出第一节所述**问题** 3,而**问题** 3 等同于杨路,张景中等在文[9][10]中提及的 *Heilbronn* 数,即区域内点构成凸体最大面积与最小面积比的确界值,注意到此问题,当 $n=1000$ 时,也是 2018ACM 程序设计大赛赛题,等价处理时间复杂度 $O\left(n^3\right)$ 的计算几何问题.张等在文[9],[10]中使用的仿射变换,微小扰动是相对比较高等的.本文主要给出基于文[2],[8]提出的凸体堆积密度来给出关于平面上任意 n 点的 *Heilbronn* 问题的完全估计,其中第二节**定理** 1 是主要结果,其泰勒逼近寻找可行多项式最佳系数的过程是新的工作,从而给出了**问题** 1 的直观结果,同时,修正了文[2]关于**问题** 2 的主要定理.

文第三节中,利用**引理** 0.1 逐步证明**引理** 2.3,进而给出关于平面上凸包直径的**问题** 3 结果即**定理** 2,事实上,这也直接地将问题减少至复杂度 $O\left(n^2\right)$,更具体地,对于确定的某一点分布来说,能直观地给出面积比确界的估计.至于本文的最后一节,是对**定理** 2 的一个直接应用即**定理** 3,有效地参数古估计了文[11]提出的**问题** 4,

一. 问题及预备知识

问题 1[1]. 点距的 *Heilbron* 型问题：设平面上给出任意 n 个点，每两个点之间有一个距离，最大距离与最小距离的比记为 λ_n，求 λ_n 的最小值（下确界）。

问题 2[2]. 单位圆内最疏分布问题：已知 O 为坐标原点，平面上 n 个点 A_1，A_2，. . . ，A_n 满足 $|OA_i|\le 1$，$(i=1,2,...,n)$. 记这 n 个点之间两两距离的最小值为 m，求 m 的最大值 r_n.

问题 3[3]. 平面上三角形的 *Heilbron* 问题：平面上给定任意 n 个点，其中任意三点可构成一个三角形，三角形的最大面积与最小面积比为 μ_n，求 μ_n 的最小值（下确界）。

问题 4[4]. 三角形内最小三角形面积上界：在一个给定的 ΔABC 上，以任意方式放入 n 个点。每一种方式确定一个 n 阶完全图 K_n。对每个 K_n，其中有面积最小的三角形。试问面积最小的三角形最大面积为多少？

引理 0.1[2]**:** 在任意二维凸体中，对一切正整数 n，$l_n \le \dfrac{C+\sqrt{C^2+(8\sqrt{3}n-4\pi)S}}{2\sqrt{3}n-\pi}$，其中 C 与 S 分别表示二维凸体的周长与面积；l_n 表示在该凸体中任意放入 n 个点，记这 n 个点两两之间距离的最小值为为 m，m 的最大值为 l_n.

引理 0.2[6]**:** 设平面上有 n 个两两不相交的等圆，其总面积为 S_n. 同时设这些圆的凸包的面积是 $S_n^{'}$，那么 $\dfrac{S_n}{S_n^{'}}<\dfrac{\pi}{\sqrt{12}}$，且 $\dfrac{\pi}{\sqrt{12}}$ 已经是最理想的上界，不可改进.

二．问题 1 上下界的估计

引理 1.1: $\lambda_n \le \dfrac{2}{r_n}$

证明: 事实上, **问题 1** 与**问题 2** 是部分等价的, 为了在单位圆内保证 m 取到尽可能大的值, n 个点两两之间的最大距离需取到直径 2. 但, 显然对**问题 1**，**问题 2** 并不一定在所有 n 时能够达到最优的情况，再由**问题 1** 中 λ_n 的定义, **引理 1.1** 即证.

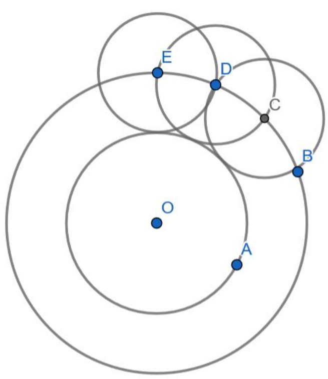
引理 1.2: $\forall n \in \mathrm{Z}^+$, 成立 $r_n \le \dfrac{2\pi + 2\sqrt{2\sqrt{3}n\pi}}{2\sqrt{3}n - \pi}$

证明: 由**引理 0.2**,**引理 1.1**, 可得

$$r_n \le \frac{2}{\lambda_n} \le \frac{2}{\sqrt{\frac{\sqrt{12}}{\pi}\sqrt{n} - 1}} = \frac{2\left(\sqrt{\frac{\sqrt{12}}{\pi}\sqrt{n}} + 1\right)}{\frac{n\sqrt{12}}{\pi} - 1} = \frac{2\pi + 2\sqrt{2\sqrt{3}n\pi}}{2\sqrt{3}n - \pi}$$

引理 1.3: $r_n \ge \max\left\{\dfrac{2\sin\frac{\pi}{m}(1 - r_{n-m}) + r_{n-m} - \left|2\sin\frac{\pi}{m}(1 + r_{n-m}) - r_{n-m}\right|}{2}\right\}, (7 \le m \le n)$

证明: **问题 1** 中, 考虑下图



设单位圆 O 的圆周上排列着 m 个点的情况下，则根据抽屉原理，至少有两点 B 与 C 使得 $\angle BOC \le \frac{2\pi}{m}$，进而 $BC \le 2\sin\frac{\pi}{m}$，不难看出 $r_n \le BC \le 2\sin\frac{\pi}{m}$。

以圆心为 O，半径为 $1-2\sin\frac{\pi}{m}$ 做圆，可以保证该圆内所有点到圆周的距离小于 $2\sin\frac{\pi}{m}$。在该圆内放置 $(n-m)$ 个点，得到：$r_n \le (1-2\sin\frac{\pi}{m})r_{n-m}$。

于是，当 m 取遍所有值时显然：

$$r_n \ge \max\left\{\min\left(2\sin\frac{\pi}{m},(1-2\sin\frac{\pi}{m})r_{n-m}\right)\right\},(7\le m\le n)$$

根据最小值恒等式,上式等价

$$r_n \ge \max\left\{\frac{2\sin\frac{\pi}{m}(1-r_{n-m})+r_{n-m}-\left|2\sin\frac{\pi}{m}(1+r_{n-m})-r_{n-m}\right|}{2}\right\},(7\le m\le n)$$

下考虑函数 $g(n)=\frac{2\pi}{\sqrt{12n}-2}-\frac{\pi^3}{3\left(\sqrt{12n}-2\right)^3}-\frac{a}{\sqrt{n}}$

引理 1.4: $\forall n\in Z^+$ 且 $n\ge 13$，成立 $(1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2})g(n-\sqrt{12n}+2)\ge g(n)$ 的 a 单调递增

证明: 令 $n^{'}=\frac{\pi}{\sqrt{12n-12\sqrt{12n}+24}-2}$，由原式得到：

$$(1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2})(2n^{'}-\frac{n^{'3}}{3}-\frac{a}{\sqrt{n-\sqrt{12n}+2}})-\frac{\pi}{\sqrt{3n}-1}+\frac{\pi^3}{24(\sqrt{3n}-1)^3}+\frac{a}{\sqrt{n}}\ge 0$$

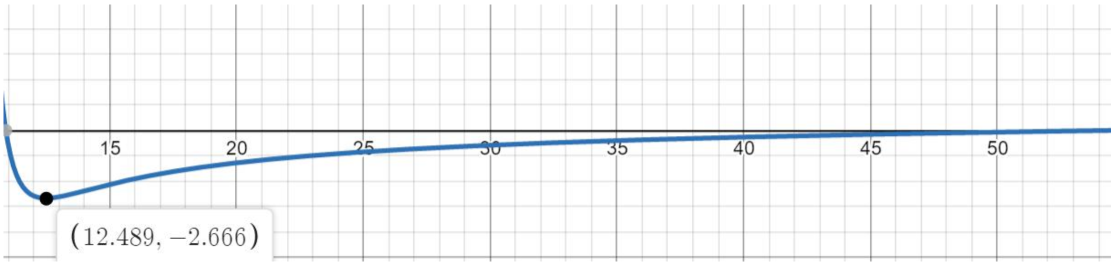
进行参变分离，得：

$$(1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2})(2n^{'}-\frac{n^{'3}}{3})-\frac{\pi}{\sqrt{3n}-1}+\frac{\pi^3}{24(\sqrt{3n}-1)^3}\ge a\left[\frac{1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2}}{\sqrt{n-\sqrt{12n}+2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

移项，由右端的 $\left[\frac{1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2}}{\sqrt{n-\sqrt{12n}+2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ 为负，得：

$$\frac{\left[(1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n-2}})(2n'-\frac{n'^3}{3})-\frac{\pi}{\sqrt{3n}-1}+\frac{\pi^3}{24(\sqrt{3n}-1)^3}\right]}{\left[\frac{1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n-2}}}{\sqrt{n-\sqrt{12n}+2}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]}\le a$$

使用绘图软件 *Desmos* 直观表现左端函数的递增性，结果如下：



引理 1.5:存在实数 a，对于任何正整数 n，成立

$$(1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2})g(n-\sqrt{12n}+2)\ge g(n), \text{则 } a\ge\frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

证明: 当 $n\to\infty$ 时，为了简化运算，可忽略与 n 或者 $\sqrt{n}$ 相加减的常数.

另外, 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = x$, 而在 $n\to\infty$ 时, $\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2}\to 0$, 符合代换的条件

原命题等价于：

$$(1-\frac{\pi}{\sqrt{3n}})g(n-\sqrt{12n})\ge g(n)$$

为方便代换，令 $p=\sqrt{n-\sqrt{12n}}$ ，得到：

$$(1-\frac{\pi}{\sqrt{3n}})(\frac{2\pi}{\sqrt{12}p}-\frac{\pi^3}{72\sqrt{3}p^3}-\frac{a}{p})\ge\frac{\pi}{\sqrt{3n}}-\frac{\pi^3}{72\sqrt{3}n\sqrt{n}}-\frac{a}{\sqrt{n}}$$

将 a 移至不等式左边，得到：

$$a(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{\pi}{\sqrt{3n}p}-\frac{1}{p})\ge\frac{\pi}{\sqrt{3n}}-\frac{\pi^3}{72\sqrt{3}n\sqrt{n}}-\frac{2\pi}{\sqrt{12}p}+\frac{\pi^3}{72\sqrt{3}p^3}+\frac{2\pi^2}{6\sqrt{n}p}-\frac{\pi^4}{216p^3\sqrt{n}}$$

通分，得到：

$$a\frac{\sqrt{3}p+\pi-\sqrt{3n}}{\sqrt{3n}p}\ge\frac{72\sqrt{3}\pi np^3-\sqrt{3}\pi^3p^3-72\sqrt{3}\pi p^2n\sqrt{n}+\pi^3n\sqrt{3n}+72\pi^2np^2-\pi^4n}{216p^3n\sqrt{n}}$$

此式等价于

$$a \geq \frac{\sqrt{3n}p\cdot(72\sqrt{3}\pi np^3-\sqrt{3}\pi^3p^3-72\sqrt{3}p^2n\sqrt{n}+\pi^3n\sqrt{3n}+72\pi^2np^2-\pi^4n)}{(\sqrt{3}p+\pi-\sqrt{3n})\cdot 216p^3n\sqrt{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(72\sqrt{3}\pi np^3-\sqrt{3}\pi^3p^3-72\sqrt{3}p^2n\sqrt{n}+\pi^3n\sqrt{3n}+72\pi^2np^2-\pi^4n)}{(\sqrt{3}p+\pi-\sqrt{3n})\cdot 216p^2n}$$

因 $n\to\infty$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3}p-\sqrt{3}n+\pi)=\pi$，进而得到：

$$a \geq \frac{\sqrt{3}(72\sqrt{3}\pi np^3-\sqrt{3}\pi^3p^3-72\sqrt{3}p^2n\sqrt{n}+\pi^3n\sqrt{3n}+72\pi^2np^2-\pi^4n)}{216\pi p^2n}$$

$$=\frac{216\pi(np^3-p^2n\sqrt{n})}{216\pi p^2n}+\frac{72\sqrt{3}\pi^2np^2}{216\pi p^2n}+\frac{\sqrt{3}\pi^3n\sqrt{n}}{216\pi p^2n}-\frac{\sqrt{3}\pi^3p^3}{216\pi p^2n}-\frac{\pi^4n}{216\pi p^2n}$$

$$=(p-\sqrt{n})+\frac{\pi}{\sqrt{3}}+O(\frac{1}{n})-O(\frac{1}{n})-O(\frac{1}{n^2})=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

引理 1.6: $r_n \geq g(n)=\frac{2\pi}{\sqrt{12n}-2}-\frac{\pi^3}{3\left(\sqrt{12n}-2\right)^3}-\frac{a}{\sqrt{n}},(7\leq m\leq n)$

证明: 根据**引理 1.3**, 为给出一个不等式直观的较优放缩, 考虑泰勒逼近关于上述函数 $g(n)$, 下证 $r_n \geq g(n)$.

等价地, 证

$$2\sin(\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2})>g(n),$$

$$(1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2})r_{n-\sqrt{12n}+2}\geq(1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2})g(n-\sqrt{12n}+2)\geq g(n).$$

利用 $\sin x$ 的泰勒展开式对 $g(n)$ 构造: $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}$

显然, $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$

取式 $2\sin(\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2})>g(n)$ 的前两项进行逼近, 令 $g(n)=\frac{2\pi}{\sqrt{12n}-2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2}\right)^3$

有 $r_n = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$，故余项可以被忽略不计.

通过机器计算（代码见附录 1），发现后一个不等式 $g(n)$ 总比下边

$(1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2})r_{n-\sqrt{12n}+2} \ge (1-2\sin\frac{\pi}{\sqrt{12n}-2})g(n-\sqrt{12n}+2) \ge g(n)$ ）大 $O(\frac{1}{n})$，后试图将 $g(n)$ 在原本的泰勒展开式上减去 $O(\frac{1}{n})$，但仍无法保证不等式成立，在尝试的过程中发现减去 $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 可以保持不等式的成立.

即 $g(n) = 2n_1 - \frac{n_1^3}{3} - \frac{a}{\sqrt{n}}$，其中 $n_1 = \frac{\pi}{\sqrt{12n}-2}$

定理 1： $\forall n \in Z^+$，成立 $r_n \ge \frac{2\pi}{\sqrt{12n}-2} - \frac{\pi^3}{3(\sqrt{12n}-2)^3} - \frac{a}{\sqrt{n}}$，则 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$，而且有 a 关于 $n(n \ge 13)$ 的最优解是单调递增的，$\lim\limits_{n\to\infty} a = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

证明： **定理 1** 前半段即**引理 1.6**, 下证后半段.

注意到：$\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \frac{\pi}{\sqrt{3n}-1} - \frac{a}{\sqrt{n}} - O(\frac{1}{n\sqrt{n}}) > \frac{\pi - \sqrt{3}a}{\sqrt{3n}}$

为使 $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) > 0$，取 $a = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

由于满足不等式成立的最小 a 随着 n 的增大而增大，故 n 越小，给出的估计越精确. 下表列出了一些 n 对应的满足不等式成立的最小 a 值(代码见附录 2)，以供参考。

a	n
0.007	55
0.071	60
0.391	100
0.725	200
1.058	500

1.248	1000
1.614	10000
1.748	100000
1.793	1000000
1.8138	∞

显然地, 由**引理 1.1**,**引理 1.2**，**定理 1** 即得

推论 1：$\forall n \in \mathrm{Z}^{+}$,成立$\dfrac{2\sqrt{3}n-\pi}{\pi+\sqrt{2\sqrt{3}n\pi}} \le \lambda_n \le \dfrac{2}{\dfrac{2\pi}{\sqrt{12n}-2}-\dfrac{\pi^3}{3\left(\sqrt{12n}-2\right)^3}-\dfrac{\pi}{\sqrt{3n}}}$

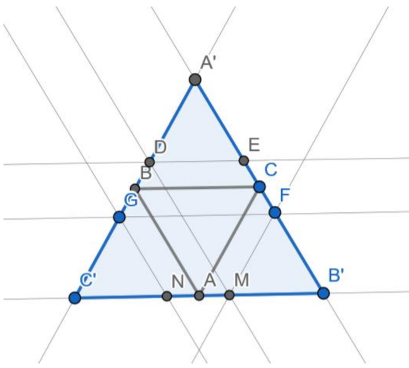
三. 问题 3 的参数估计

引理 2.1：平面上给定任意n个点，其中任意三点可构成一个三角形，若最大三角形面积为S，则n个点的凸包面积小于$\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}S$.

证明: 在$\Delta A'B'C'$的三个顶点上分别划出三个同样大小的小三角形, 如下图:

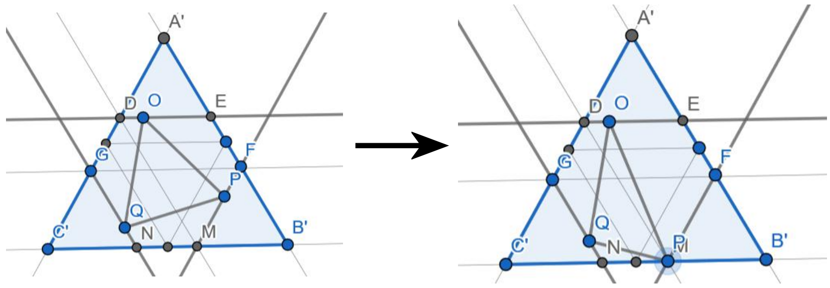
其中：$DE = kB'C'$；$MF = kA'C'$；$GN = kA'B'$；$0 < k < 0.5$

求尽可能大的k使得顶点分别在三个小三角形内的最小三角形面积大于等于S

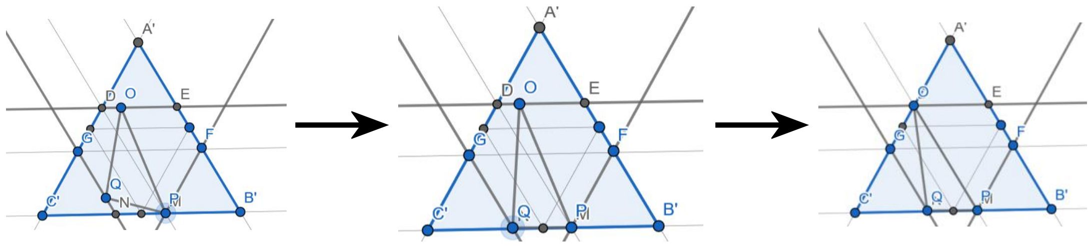


设该三角形为ΔOPQ，因为要取到最小面积，故设O,P,Q三点分别在DE,MF,GN上，采用局部调整法将其面积调整到最小值。

先考察线段OQ，若OQ不平行于MF，由于三角形面积为$S=\frac{1}{2}$底·高，则总可以将P调整至MF的一段，使得三角形面积最多地减少，例：



若OQ于MF平行，则将点P调整至另外一段，再以类似的方式考察PQ和PO，最后总可以将三角形调整至下图中的情况：



（先调整Q，再调整O）

所以ΔOPQ的最小面积就是$4(1-2k)(1-k)S$

解不等式$4(1-2k)(1-k)S>S$

$\therefore\ 2k^2-3k+1>\frac{1}{4}\ \ \therefore\ (k-\frac{3}{4})^2>\frac{3}{16}$

解得$0<k<\frac{3-\sqrt{3}}{4}$，凸包面积<$4S-4k^2S$

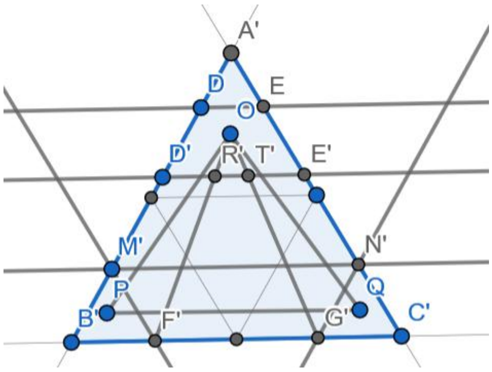
引理 2.2: 平面上给定任意n个点，其中任意三点可构成一个三角形，若最大三角形面积为S，则n个点的凸包面积小于

$\frac{2+3\sqrt{3}}{2}S-4k^2S\approx3.52S$. ($k$为下证中方程的根)

证明: 如图, $DE\,//\,D'E'\,//\,B'C'$, $M'F'\,//\,A'C'$, $N'G'\,//\,A'B'$, $\frac{DE}{BC}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$,

设$\frac{M'F'}{A'C'}=\frac{N'G'}{A'B'}=k$，且$S_{DD'E'E}=S_{\Delta B'M'F'}=S_{\Delta N'G'C'}=4k^2S$

在**引理 2.1** 的结果上继续进行计算。设点O落在梯形$DD'E'E$中，p落在$\Delta B'M'F'$中，$\Delta C'N'G'$中。OF'交$D'E'$于R'，OG'交$D'E'$于T'



显然地，满足不等式$S_{\Delta OPQ} \geq S_{\Delta A'B'C'} - S_{\Delta A'D'E'} - S_{梯形D'R'F'B'} - S_{梯形ET'G'C'} - S_{梯形M'F'G'N'} \geq S$

为方便表示，设$k_0 = \sqrt{k^2 + \frac{6-3\sqrt{3}}{8}} = \frac{D'E'}{B'C'}$；

因为

$$S_{\Delta A'D'E'} = 4\left(\frac{6-3\sqrt{3}}{8} + k^2\right)S$$

$$S_{梯形D'R'F'B'} + S_{梯形ET'G'C'} \leq \frac{D'E' + B'F' + C'G'}{B'C'}(1-k_0)4S$$

$$S_{梯形M'F'G'N'} = 4\left(1-(1-k)^2 - 2k^2\right)S$$

将所设k值代入不等式，得：

$$4S - \frac{6-3\sqrt{3}}{2}S - 4k^2S - 4\left(1-(1-k)^2-2k^2\right)S - 4(k_0+2k)(1-k_0)S$$

$$= \frac{2+3\sqrt{3}}{2}S + 4S(2k^2 + k_0{}^2 + 2kk_0 - 4k - k_0) > S$$

$$\therefore\ 4(2k^2 + k_0{}^2 + 2kk_0 - 4k - k_0) > -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

再将k_0代回原不等式，得：

$$3k^2 + 2k\sqrt{k^2 + \frac{6-3\sqrt{3}}{8}} - 4k - \sqrt{k^2 + \frac{6-3\sqrt{3}}{8}} > -\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ 3k^2 - 4k + \frac{3}{4} > (1-2k)\sqrt{k^2 + \frac{6-3\sqrt{3}}{8}}$$

$\because$ $0<k<1/2$, $3k^2-4k+3/4>0$；求得 k 的定义域 $0<k<\dfrac{4-\sqrt{7}}{6}$

继续解不等式，得：

$$9k^4-24k^3+\frac{41}{2}k^2-6k+\frac{9}{16}>(4k^2-4k+1)(k^2+\frac{6-3\sqrt{3}}{8})$$

$$=4k^4-4k^3+\frac{8-3\sqrt{3}}{2}k^2+\frac{3\sqrt{3}-6}{2}k+\frac{6-3\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore\ 5k^4-20k^3+\frac{3\sqrt{3}+33}{2}k^2-\frac{6+3\sqrt{3}}{2}k+\frac{6\sqrt{3}-3}{16}>0$$

用近似代替，解得：$k<0.139746$

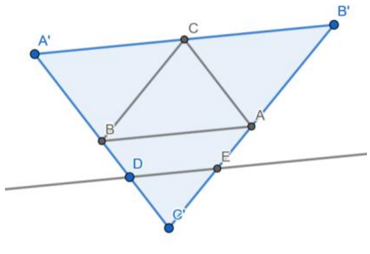
故凸包面积 $<\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}S-k^2*4S=3.51996S$

引理 2.3:平面上给定任意 n 个点，其中任意三点可构成一个三角形，若最大三角形面积为 S，则下图四边形 $A'DEB'$ 的周长

$C_{A'DEB'}\geq c\sqrt{S}\approx 7.85654\sqrt{S}$. ($c$为下证中方程的根)

证明: 在任意凸体中，面积不变时，**引理 0.1** 中 l_n 的上界随周长的增加而增加. 为了在凸包面积与最大三角形面积 S 确定的情况下，使得 l_n 尽量小，就必须尽量使得凸包的周长尽量小。

考虑如图,



设 ΔABC 是面积为 S 的最大三角形，其对应的三边长分别为 a,b,c，且设 $a>b>c$，

$AB=A'C=B'C=c, BC=AC'=AB'=a, AC=A'B=BC'=b$，则根据**引理 2.1，引理 2.2** 的结果，欲使 $C_{A'DEB'}$ 取到最小，即 $C_{A'DEB'}=(2+2k_0)c+(2-2k_0)(a+b)$ 最小.

$\because$ $C_{A'DEB'}=(2+2k_0)*c+(2-2k_0)*(a+b)$

且当 c 确定时，易知 $a+b$ 的最小值为

$$2\sqrt{\frac{4S^2}{c^2}+\frac{c^2}{4}}$$

$\therefore\ C_{A'DEB'}=(2+2k_0)c+(2-2k_0)(a+b)\geq(2+2k_0)c+(4-4k_0)\sqrt{\frac{4S^2}{c^2}+\frac{c^2}{4}}$

其中$c\in(0,+\infty)$

令$f(c)=(2+2k_0)c+(4-4k_0)\sqrt{\frac{4S^2}{c^2}+\frac{c^2}{4}}$，其中$c\in(0,+\infty)$

求导得

$$f'(c)=(2-2k_0)\frac{1}{\sqrt{\frac{4S^2}{c^2}+\frac{c^2}{4}}}\left(-\frac{8S^2}{c^3}+\frac{c}{2}\right)+2+2k_0$$

当 $f'(c)=0$时，c取到最小值

即

$$f'(c)=(2-2k_0)\frac{1}{\sqrt{\frac{4S^2}{c^2}+\frac{c^2}{4}}}\left(-\frac{8S^2}{c^3}+\frac{c}{2}\right)+2+2k_0=0$$

即

$$(1-k_0)\frac{1}{\sqrt{\frac{4S^2}{c^2}+\frac{c^2}{4}}}\left(-\frac{8S^2}{c^3}+\frac{c}{2}\right)=-1-k_0$$

令$4S^2=m$，则

$$\left(-\frac{2m}{c^3}+\frac{c}{2}\right)=-\frac{(1+k_0)}{(1-k_0)}\sqrt{\frac{m}{c^2}+\frac{c^2}{4}}$$

两边平方，得

$$\frac{4m^2}{c^6}-\frac{2m}{c^2}+\frac{c^2}{4}=\frac{k_0^2+2k_0+1}{k_0^2-2k_0+1}\left(\frac{m}{c^2}+\frac{c^2}{4}\right)$$

令$c^4=x$，得

$$-\frac{k_0x^2}{k_0^2-2k_0+1}-\left(\frac{k_0^2+2k_0+1}{k_0^2-2k_0+1}+2\right)mx+4m^2=0$$

此时, 代入精确值计算, 利用求根公式, 得

$$x=\frac{6.24396m \pm \sqrt{51.9629}m}{-1.62198}$$

$\because \quad x>0$

$$\therefore \quad x=\frac{6.24396m - \sqrt{51.9629}m}{-1.62198}$$

为方便运算，以下都使用小数近似表示x与c，得：

$$x=2.37875S^{2}$$

$$\therefore \quad c=\sqrt[4]{x}=1.24190\sqrt{S}$$

代入得 $f(c)=(2+2k_0)c+(4-4k_0)\sqrt{\frac{4S^2}{c^2}+\frac{c^2}{4}}$

$$MinC_{A'DEB'} \approx 7.85654\sqrt{S}$$

即**引理 2.3** 得证.

定理 2: 平面上给定任意n个点，其中任意三点可构成一个三角形，给定的n个点的凸包直径为d^*，最大三角形面积为S，则三角形最大面积与最小面积比值的下确界

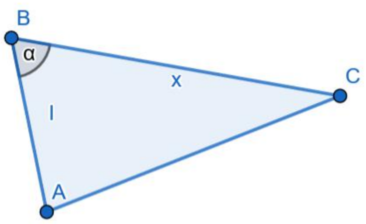
$$\inf \mu_n \geq \frac{(4\sqrt{3}n-2\pi)\ S}{(7.86\sqrt{S}+\sqrt{7.86^2+8\sqrt{3}n-4\pi}\cdot\sqrt{\sqrt{n-\sqrt{12n}S}})d^*}$$

证明: 根据**引理 2.3,引理 0.1** 有

$$l_n \leq \frac{a\sqrt{S}+\sqrt{a^2+8\sqrt{3}n-4\pi}\sqrt{pS}}{2\sqrt{3}n-\pi}, a, p\text{同上}$$

令 $l_0=\dfrac{a\sqrt{S}+\sqrt{a^2+8\sqrt{3}n-4\pi}\sqrt{pS}}{2\sqrt{3}n-\pi}$

考虑图



易知必然存在一三角形有一边长$l \leq l_0$，$x \leq d^*$

即得：

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}lx\sin\alpha<\frac{1}{2}l_0d^*$$

$$\therefore\quad \inf u_n\ge\frac{S}{S_\Delta}\ge\frac{S}{\frac{1}{2}l_0d^*}\ge\frac{(4\sqrt{3}n-2\pi)\,S}{(a\sqrt{S}+\sqrt{a^2+8\sqrt{3}n-4\pi}\sqrt{pS})d^*}$$

定理 2 证毕.

四．问题 4 的参数估计

定理 3: 在一个给定的ΔABC中，以任意方式放入n个点，若任意三点可构成三角形，d^*为ΔABC最长边, 最大三角形面积为S, 则最小三角形的面积上确界

$$\sup\mu_n\le\frac{\left(7.86\sqrt{S}+\sqrt{7.86^2+48.774n-4\pi}\cdot\sqrt{\sqrt{n-\sqrt{12n}}S}\right)d^*}{(24.4n-2\pi)S}$$

证明: 根据**引理 2.3**, 可对平面上的点数目给出估计, 即点数目为$3.51996n$, 后**问题 4** 等价为**问题 3**, 其中ΔABC内有$3.51996n$个点. 又据**引理 2.1**, **定理 2** 代入可$\sup\mu_n=\frac{1}{\inf\mu_n}\le\frac{(a\sqrt{S}+\sqrt{a^2+48.7740n-4\pi}\sqrt{pS})d^*}{(24.3870n-2\pi)\,S}$

参考文献：

[1] 单墫 数学竞赛研究教程 江苏教育出版社 2009.02

[2] 赵吟泓 单位圆内点的最疏分布问题研究 丘成桐中学数学奖 2017.12

[3] 杨之 初等数学研究的问题与课题 1995.12

[4] 苏昌盛 *Heilbronn* 型问题的进一步探讨 数学教学研究 2001

[5] 苏昌盛 *Heilbronn* 型问题的再研究 数学教学研究 2005

[6] 熊斌 田廷彦 平面等圆与 *Heilbronn* 问题的下界

[7] 熊斌 七点的 *Heilbronn* 问题的证明

[8] 宗传明 离散几何欣赏

[9] 杨路 张景中 曾振柄 关于三角形区域的 *Heilbronn* 数 数学学报 1994

[10] 杨路 张景中 曾振柄 最初几个 *Heilbronn* 数的猜想和计算 数学年刊 1992

[11] 苏茂鸣 组合几何中一类问题的研究与猜想 中学数学（湖北）1995.1

附录 1：

heilbron.cpp

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const double pi=3.14159265358979323;
//const double c1=sqrt(sqrt(12) / pi);
//const double c2=sqrt(4 / pi);
int n;
double a;

double g(double x)
{
    double x1=pi / (sqrt(12*x)-2);
    return 2*x1-x1*x1*x1/3;
}

int main() {
    for (int i=10000;i<=10099;i++)
    {
        double x=pi / (sqrt(12*i)-2); /*double np=pi / (sqrt(12*i-12*sqrt(12*i)+24) - 2);
        a=((1-2*sin(x))*(2*np-np*np*np / 3)-(pi) / (sqrt(3*i)-1)+(pi*pi*pi) / (24*(sqrt(3*i)-1)*(sqrt(3*i)-1)*(sqrt(3*i)-1))) /
        ((1-2*sin(x)) / (sqrt(i-sqrt(12*i)+2))-(1) / (sqrt(i)));
        if (i<=54) a=0;
        cout<<i<<" "<<a<<" "<<2*sin(x)<<" "<<(1-2*sin(x))*g(i-sqrt(12*i)+2)<<" "<<g(i)<<endl;*/
        cout<<i<<" "<<g(i)-(1-2*sin(x))*g(i-sqrt(12*i)+2)<<" "<<1.00 / i<<endl;
    }
    return 0;
}
```

图中蓝色代表被注释的代码，不运行

左起第一列依次输出 n 的值，$g(n)-(1-2\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{12n}-2})g(n-\sqrt{12n}+2)$ 的值，与 $\dfrac{1}{n}$ 的值.

10041	1.42635e-005	9.95917e-005
10042	1.42621e-005	9.95818e-005
10043	1.42607e-005	9.95718e-005
10044	1.42594e-005	9.95619e-005
10045	1.4258e-005	9.9552e-005
10046	1.42566e-005	9.95421e-005
10047	1.42552e-005	9.95322e-005
10048	1.42538e-005	9.95223e-005
10049	1.42524e-005	9.95124e-005
10050	1.4251e-005	9.95025e-005
10051	1.42496e-005	9.94926e-005
10052	1.42482e-005	9.94827e-005
10053	1.42468e-005	9.94728e-005
10054	1.42454e-005	9.94629e-005
10055	1.4244e-005	9.9453e-005
10056	1.42427e-005	9.94431e-005
10057	1.42413e-005	9.94332e-005
10058	1.42399e-005	9.94233e-005
10059	1.42385e-005	9.94135e-005
10060	1.42371e-005	9.94036e-005
10061	1.42357e-005	9.93937e-005
10062	1.42343e-005	9.93838e-005
10063	1.42329e-005	9.93739e-005
10064	1.42315e-005	9.93641e-005
10065	1.42302e-005	9.93542e-005
10066	1.42288e-005	9.93443e-005
10067	1.42274e-005	9.93345e-005
10068	1.4226e-005	9.93246e-005
10069	1.42246e-005	9.93147e-005
10070	1.42232e-005	9.93049e-005

附录 2:

[*] heilbron.cpp

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const double pi=3.14159265358979323;
//const double c1=sqrt(sqrt(12) / pi);
//const double c2=sqrt(4 / pi);
int n;
double a;

double g(double x)
{
    double x1=pi / (sqrt(12*x)-2);
    return 2*x1-x1*x1*x1/3-a / sqrt(x);
}

double sine(int n)
{
    return sin(pi*n/180);
}

int main() {
    for (int i=3;i<=100;i++)
    {
        double x=pi / (sqrt(12*i)-2); double np=pi / (sqrt(12*i-12*sqrt(12*i)+24) - 2);
        a=((1-2*sin(x))*(2*np-np*np*np / 3)-(pi) / (sqrt(3*i)-1)+(pi*pi*pi) / (24*(sqrt(3*i)-1)*(sqrt(3*i)-1)*(sqrt(3*i)-1))) /
        ((1-2*sin(x)) / (sqrt(i-sqrt(12*i)+2))-(1) / (sqrt(i)));
        if (i<=54) a=0;
        cout<<i<<" "<<a<<" "<<2*sin(x)<<" "<<(1-2*sin(x))*g(i-sqrt(12*i)+2)<<" "<<g(i)<<endl;
    }
    return 0;
}
```

左起第一列依次打印 n 的值, a 的值, $2\sin n_1$ 的值, $(1-2\sin(n_1))g\left(n-\left(\sqrt{12n}-2\right)\right)$ 的值, $g(n)$ 的值. 第四幅图中的 e 代表乘以10的负次方.

在 $n\le 54$ 时, a 取0. 随后,打印**引理 1.4** 中给出的 a 取值. 这么做是为了在 $n\le 54$ 时保证 $2\sin n_1 \ge g(n)$.

```
13 0 0.590056 0.638596 0.590016
14 0 0.565391 0.607989 0.565359
15 0 0.543445 0.579563 0.543418
16 0 0.523761 0.554177 0.523739
17 0 0.505982 0.53165 0.505964
18 0 0.489824 0.511596 0.489809
19 0 0.47506 0.493636 0.475047
20 0 0.461503 0.477448 0.461491
21 0 0.448998 0.462762 0.448989
22 0 0.43742 0.449362 0.437412
23 0 0.426661 0.43707 0.426653
24 0 0.416629 0.42574 0.416622
25 0 0.407248 0.415251 0.407242
26 0 0.398451 0.405504 0.398445
27 0 0.390181 0.396413 0.390176
28 0 0.382387 0.387908 0.382383
29 0 0.375027 0.379927 0.375023
30 0 0.368063 0.372418 0.368059
31 0 0.361459 0.365335 0.361456
32 0 0.355188 0.358641 0.355185
33 0 0.349222 0.352299 0.349219
34 0 0.343537 0.34628 0.343534
35 0 0.338112 0.340557 0.33811
36 0 0.332929 0.335107 0.332927
37 0 0.32797 0.329908 0.327967
38 0 0.323219 0.324942 0.323217
39 0 0.318663 0.320191 0.318661
40 0 0.314289 0.31564 0.314287
41 0 0.310085 0.311276 0.310083
42 0 0.30604 0.307087 0.306039
```

```
41 0 0.310085 0.311276 0.310083
42 0 0.30604 0.307087 0.306039
43 0 0.302145 0.30306 0.302144
44 0 0.298391 0.299185 0.29839
45 0 0.29477 0.295454 0.294769
46 0 0.291274 0.291857 0.291273
47 0 0.287896 0.288387 0.287895
48 0 0.28463 0.285036 0.284629
49 0 0.281469 0.281798 0.281468
50 0 0.278409 0.278666 0.278408
51 0 0.275444 0.275635 0.275443
52 0 0.272569 0.2727 0.272568
53 0 0.26978 0.269855 0.269779
54 0 0.267073 0.267096 0.267072
55 0.00713795 0.264443 0.26348 0.26348
56 0.0206936 0.261888 0.259122 0.259122
57 0.0338571 0.259404 0.254919 0.254919
58 0.0466486 0.256987 0.250861 0.250861
59 0.0590866 0.254635 0.246942 0.246942
60 0.0711883 0.252345 0.243154 0.243154
61 0.08297 0.250114 0.23949 0.23949
62 0.0944465 0.24794 0.235945 0.235945
63 0.105632 0.24582 0.232511 0.232511
64 0.116539 0.243753 0.229185 0.229185
65 0.127181 0.241735 0.22596 0.22596
66 0.137568 0.239766 0.222832 0.222832
67 0.147712 0.237843 0.219796 0.219796
68 0.157622 0.235964 0.216849 0.216849
69 0.167309 0.234128 0.213986 0.213986
70 0.17678 0.232334 0.211204 0.211204
```

```
71 0.186046 0.230579 0.208499 0.208499
72 0.195113 0.228862 0.205868 0.205868
73 0.203989 0.227183 0.203307 0.203307
74 0.212682 0.225539 0.200814 0.200814
75 0.221198 0.223929 0.198387 0.198387
76 0.229543 0.222353 0.196022 0.196022
77 0.237724 0.220808 0.193717 0.193717
78 0.245746 0.219295 0.19147 0.19147
79 0.253615 0.217812 0.189278 0.189278
80 0.261336 0.216358 0.187139 0.187139
81 0.268915 0.214932 0.185052 0.185052
82 0.276355 0.213533 0.183015 0.183015
83 0.283661 0.212161 0.181025 0.181025
84 0.290838 0.210814 0.179081 0.179081
85 0.297889 0.209492 0.177181 0.177181
86 0.304819 0.208194 0.175325 0.175325
87 0.311632 0.20692 0.173509 0.173509
88 0.31833 0.205668 0.171734 0.171734
89 0.324917 0.204438 0.169997 0.169997
90 0.331397 0.203229 0.168297 0.168297
91 0.337773 0.202042 0.166633 0.166633
92 0.344047 0.200874 0.165004 0.165004
93 0.350223 0.199726 0.163409 0.163409
94 0.356303 0.198597 0.161847 0.161847
95 0.36229 0.197487 0.160316 0.160316
96 0.368186 0.196394 0.158816 0.158816
97 0.373994 0.19532 0.157346 0.157346
98 0.379717 0.194262 0.155905 0.155905
99 0.385356 0.193221 0.154491 0.154491
100 0.390914 0.192197 0.153105 0.153105
```

```
10000033 1.80713 0.000573678 2.21468e-006 2.21468e-006
10000034 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000035 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000036 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000037 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000038 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000039 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000040 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000041 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000042 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000043 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000044 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000045 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000046 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000047 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000048 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000049 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000050 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000051 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000052 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000053 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000054 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000055 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000056 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000057 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000058 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000059 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000060 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000061 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
10000062 1.80713 0.000573677 2.21468e-006 2.21468e-006
```