



国际竞赛 科研科创 发表论文
关注“有方背景提升”

参赛队员姓名： 彭澹明 樊亦扬 刘若辰

中学： 南京外国语学校

省份： 江苏

国家/地区： 中国

指导教师姓名： 潘志民、王思慧

论文题目： 水波的时间反演现象的研究



水波的时间反演现象的研究

彭澹明 樊亦扬 刘若辰

摘要

在波的行进过程中，当受到一种特殊扰动后，其传播方向可能发生反向。某一波形图案因扩散而彻底紊乱后，若能及时给予这种扰动，便可一定程度上使波形复原，再度重现原初的全部信息，这一效应宛如时间回溯的现象。本文在法国科学家发表的论文的基础上，对此进行了更深入的研究，更进一步地刻画了扰动和回溯波的模型。我们以自然界中随处可见的水波为载体，研究了以速度扰动为核心的一系列扰动过程。通过详细而严密的理论计算，本文阐明了外界扰动的本质和水波回溯的基本原理，并比较了扰动前后水波的相关属性。对于一维情形，我们揭示了初始波和回溯波之间美妙的内在关联，即两者的波形在形式上互为微分与积分。

在理论分析中，本文又从另一角度二次审视了此现象。通过将速度扰动拆分成三个子过程，我们提出了“时间介质”的概念，把液体具有不同波速的时间段类比为不同的介质，继而将扰动视为波在“时间界面”上发生了反射与折射。由此，可类比于空间界面上的反射与折射，本文引入了反射系数、折射系数等来定量描述回溯波与原始波等波形间的关系，并计算了各状态的能量比，从而得出了扰动前后能量不一定守恒的结论。对此，再进一步分析了影响能量变化的诸如波形宽度、波速、扰动强度等因素。

为了验证理论的正确性，我们购置了振动平台作为实验装置，调节振幅频率等参数使水波回溯的现象肉眼可见，并拍摄了相关视频，初步证实了理论预测。



为了定量分析，我们搭建了激光器，并于上面放置多孔挡光板产生点阵，通过折射法从水缸下方透过水面，测量点阵图案的偏移，再使用计算机算法还原出原波形，从而进行比对。通过多次更改实验参数，从实验上更进一步地分析了影响水波时间回溯现象的物理条件。本文结合理论与实验结果，使用计算机进行模拟，对一系列诸如水滴和其它更加复杂的图形的扩散和扰动过程进行了估算，证实了理论与实验之间良好的匹配性。除此以外，我们根据已有结论，将此现象推广到了更高维度，以及除水波以外的各种机械波、光波之中，提出了更多的展望。

关键词：波动方程，时间反演，激光测量，反射/折射定律



目录

摘要.....	2
目录.....	4
1 引言与背景	5
2 预实验——水波传播的时间反演现象	6
2.1 机械震动平台简介	6
2.2 预实验现象	7
3 时间反演的理论模型	8
3.1 波动方程	9
3.2 实现时间反演——波形回溯	10
3.3 数值模拟	15
4 定量实验验证	17
4.1 利用激光束阵列实时测量水波	17
4.2 时间反演测量结果	19
4.3 理论与实验的对比	19
5 时间反演现象的进一步探究	20
5.1 广义的“时间反射/折射定律”	20
5.2 时间反演中的能量不守恒	26
6 总结与讨论	28
参考文献	30
致谢	30
学术诚信声明	31
附录	32
附录 1——物理模型	32
附录 2——实验模型	33



1 引言与背景

2019年4月10日晚，人类历史上首张黑洞照片公布与众（如图1上所示）。而早在一百多年前，卡尔·史瓦西，一位来自德国的天文学家，通过计算得到了爱因斯坦引力场方程的一个真空解，他“预言”了一个神秘天体：质量极大，引力也极大，连光也无从逃脱，人类无法直接观测到它，于是给了它一个名字，叫“黑洞”。与此同时，相对论也告诉我们，在这样一个天体上，还存在着明显的“时间减缓”效应。2014年的科幻电影《星际穿越》是在知名理论物理学家，诺贝尔物理学奖得主基普·索恩的黑洞理论上合理演化得到，其中为我们展示了在黑洞边缘（图1下），飞船上的时间仅仅流逝一小时的时候，地球上的时间已经经过了7年，这足以见到黑洞改变时间的能力。

然而，如果我们进一步来考虑呢？时间能够被延缓，那如果延缓到一定程度，是否能够使得时间静止？甚至是使得时间发生倒流？大部分科学家认为，在每一个黑洞的中心，存在着一个具有无限大的物质密度、无限大的压力、无限弯曲的时空的点，它被称为奇点。而在这一点，时间和空间将会静止。然而遗憾的是，至今为止，有限的探测手段使得观测到黑洞的外围已属不易，对于时间静止的直接观测恐怕还有很长的一段路要走。

然而，直接的观测不易，我们却可以在一些独特的物理过程中观测到等效的时间反演（time reversal）现象。例如，法国巴黎高等物理化工学院的 Mathias Fink 教授提出【1, 2】，通过构建合适的时空调制体系，包括在水中和空气中传递的声波，和在自由空间传播的电磁波，都能够用于实现时间反演这一奇特的物理过程：在满足一定条件时，一列向外传播的波受到扰动，会衍生出一列方向相反的波，并以相应的相位信息传播到波源位置，这样，在波源位置处即可观测到，已经扩散出去的波沿着原本的路径回到了起始点，仿佛发生了时间反转一般。广义而言，凡是描述运动状态的函数，只要具有时间周期性和空间周期性特征的都可称为波。综上所述，掌握了波的时间反演这一现象后，可以实现对于波中信息的高度还原，其对科技研究有着重大意义。

而在本文中，我们通过构建水波扩散体系，去证明时间反演现象是真实存在的；并以该体系为基础，去进一步研究波的时间反演现象的出现条件及相关性质。

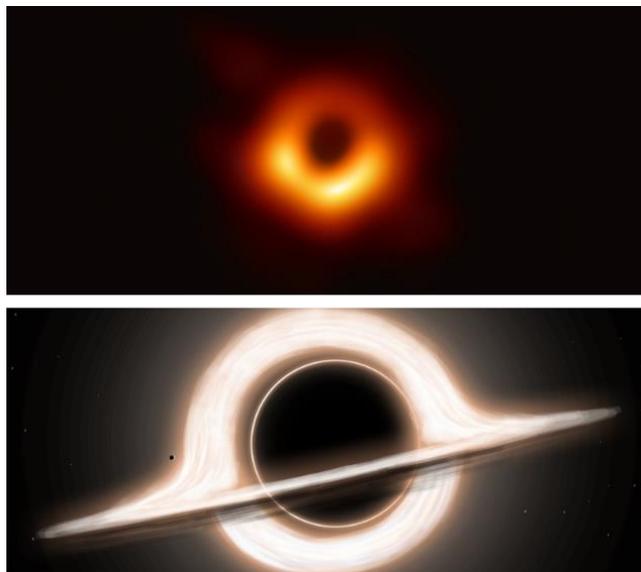


图1.人类历史上首张黑洞照片（上）以及模拟出来的黑洞结构（下）



2 预实验——水波传播的时间反演现象

为了验证波的时间反演现象确实能够在水波这样一个体系中被观测到，我们搭建了初步的实验平台来进行预实验验证，具体的设备结构和实验结果如下所示。

2.1 机械震动平台简介

如图 2 左所示，为该测量装置的示意图。进行实验时，我们在一个水平放置长方体水槽中灌入一定高度的水并将其置于震动台上。用滴管向容器正中央滴水，在水面波纹向四周扩散时，启动震动台使其以一定参数振动，同时利用高速相机观察水面波纹有无回溯现象。所用到的相关元件都列在图 2 右中的表格里。



图 2. 简易机械震动平台示意图。右表给出了搭建该系统所用到的元件。

为了定量的研究购买的震动平台的性能（如图 3 左所示），我们还在震动平台上做好了精度标记（如图 3 右所示）。即在实验中，我们用马克笔在震动台上画出一个黑点。在实验过程中，用三脚架固定住高速相机在近处拍摄该水平线运动状态。实验结束后，就能够直接运用物理 Tracker 软件分析该运动，并作出震动台的运动图像来。



图 3. 震动平台信号控制器（左）。震动精度标记（右）。

图 4 是在设定信号控制器的震动频率为 1Hz 且振幅为 95%的情况下，所测量得到的震动曲线。可以明显的看到体现出很好的稳定性，这为我们后续的实验打下了坚实的基础。

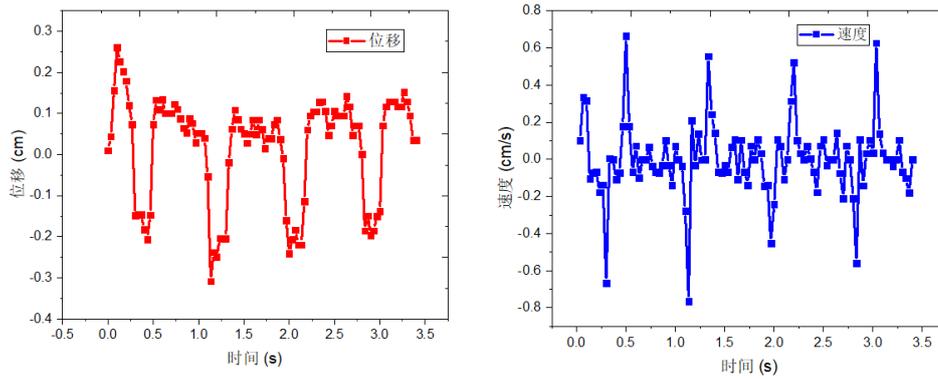


图 4.震动平台位移随时间的变化（左）。速度随时间的变化（右）。

但是，并不是所有的震动参数都能够实现很好的时间反演现象。这里，我们经过大量的尝试和优化，最终设定时间持续 1s、振动频率 1Hz、振幅 95%的实验参数。图 5 表示振动台在启动后 8s 内的高度变化情况。如图，主要振动有一次，振动台高度在 0-4s 内变化较大，振幅约为 0.2cm。主振动结束后有振幅较小的附加振动。

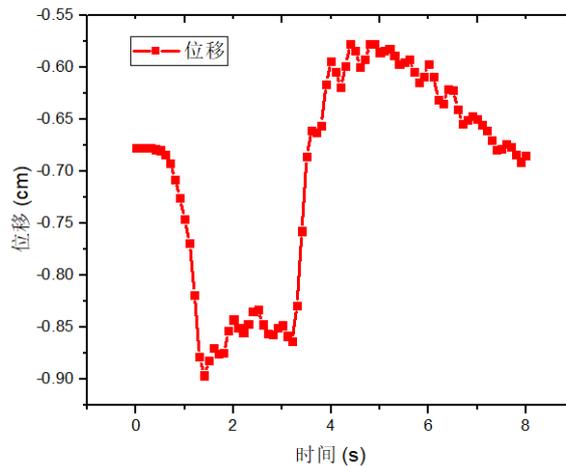


图 5.震动平台位移随时振动台相对高度随时间变化关系图像

2.2 预实验现象

如图 6 所示，在预实验中，我们明显的观测到了，随着时间的变化，只有施加了震动微扰的水波发生了时间反演，并重新聚焦于水面的中心处；而对于没有施加震动微扰的水波，在不考虑边界反射的情况下，扩散出去的水波方向不发生改变，一直向外，因此，不可能发生时间反转的现象。更多更细节的现象请见 Video1 和 Video2。

这样一组对比实验，证实了水波的时间反演现象是能够在一定的调制下确实是能够被实现的，这样的结果已经足够让我们惊喜；同时，这为我们后面进一步在实验上研究波的时间反转效应提供了一个很好的平台和对象。

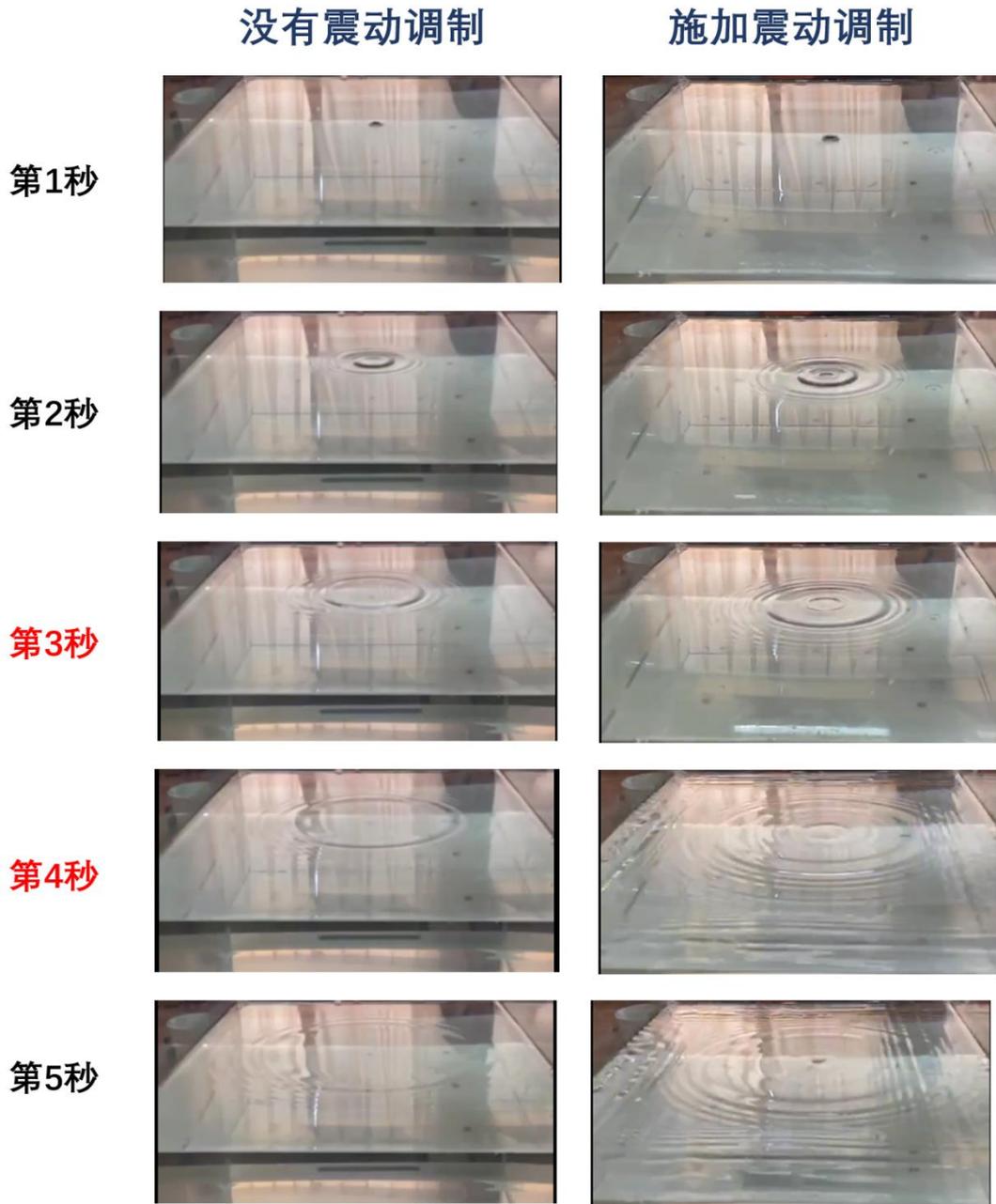


图 6.预实验结果。水波扩散波纹随时间的变化趋势。左边一列表示扩散的过程中没有施加震动微扰，右边的一列表示施加了震动微扰。所以可以明显的看出，施加了一定的震动微扰之后，水波的时间反演现象是明显的。

3 时间反演的理论模型

这一章, 我们希望通过构建合理模型去理解水波在震动微扰下发生时间反演的物理机制, 同时, 在模型的基础上, 我们能够数值模拟出来我们在实验上所观测到的现象。



3.1 波动方程

一个自由传播的、波速为 c 的波动方程的一般形式是【3】

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

现在，在波动方程内引入扰动。与一般的外力场不同，这里所探讨的扰动比较特殊，是在短时间内大幅度改变波速的值。由此，可以把波速写作时间的函数：

$$c^2 = c_0^2(1 + f(t)) \quad (2)$$

其中，当且仅当 $t \approx t_0$ 时， $f(t) \neq 0$ 。我们考虑一种比较特殊的理想情况：若扰动时间趋于无穷小，扰动的强度趋于无穷大，速度就可以写作狄拉克 δ 函数的形式。引入未受扰动时的波速 c_0 、表征强度的参量 α 和扰动时刻 t_0 ，得到速度表达式和大致函数图像如下：

$$c^2 = c_0^2(1 + \alpha \delta(t - t_0)) \quad (3)$$

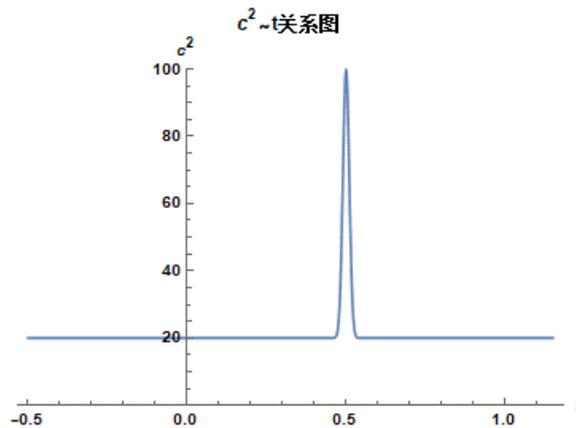


图 7. 扰动强度随时间的变化。图中各参数的取值： $c_0^2 = 20$ ， $\alpha = 2$ ， $t_0 = 0.5$

将此代入原波动方程，并把狄拉克 δ 函数移项至等式右侧，得到含速度扰动的波动方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \phi = \alpha c_0^2 \nabla^2 \phi \delta(t - t_0) \quad (4)$$

下面，先讨论一下实现这类特殊扰动的可行性。对于用具有弹性的材料作为媒介的机械波，其波速完全依赖于材料的密度和各类弹性模量。因为这些物理量都是介质的内禀属性，所以在短时间内大幅度改变弹性材料的波速是相当困难的。幸运的是，自然界存在一种良好的天然介质，不仅仅可以轻松地调节波速，还由于其波速相对较慢，因此方便人们观测——这就是受重力作用而形成的水波。查阅资料得，忽略表面张力后，无论是深水波还是浅水波，其波速都可以近似表达为

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}} \quad (5)$$

其中， g 是重力加速度， λ 是水波的波长， h 是水波表面的高度。设 H 表示水面的平衡高度， $\phi = h - H$ 就是水波表面和平衡水面的相对高度差。我们仅考虑浅水波，若各参量之间满足 $|\phi| \ll H \ll \lambda$ 的大小关系，则上式波速可简化为

$$c = \sqrt{gH} \quad (6)$$

在误差范围内，水面的平衡高度 H 可视为常数。所以，满足上述条件的浅水波的波速完全依赖于当地的重力加速度。通过在极短时间内加速整个系统，就可以使水体受到强大的惯性



力，从而大幅度改变重力加速度的大小，进而使波速发生突变。只要适当地控制时间间隔和扰动强度，就可以形成前文所述的狄拉克 δ 函数了。

3.2 实现时间反演——波形回溯

含速度扰动的波动方程是

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \phi = \alpha c_0^2 \nabla^2 \phi \delta(t - t_0) \quad (7)$$

从上式中不难看出，当 $t < t_0$ 或 $t > t_0$ 时，波完全按照基本的波动方程演化。只有当 $t = t_0$ 时，波的状态发生了突变。将含速度扰动的波动方程在 t_0 附近无穷小的区间内对时间进行积分，得到

$$\phi(\mathbf{r}, t_0^+) = \phi(\mathbf{r}, t_0^-) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^+) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) + \alpha c_0^2 \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t_0^-) \quad (9)$$

又因为扰动开始前，波正常传播，即

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) - c_0^2 \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t_0^-) = 0 \quad (10)$$

所以，

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^+) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) + \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) \quad (11)$$

这里得到了波高的变化速率在扰动前和扰动后的关系。综上所述，可以将上式等式右侧进行重组，变作

$$\phi(\mathbf{r}, t_0^+) = \phi(\mathbf{r}, t_0^-) + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) \quad (12)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^+) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) \quad (13)$$

上式右边可以竖着切分成三项，上下两行一一对应，合成一组。由于波动方程的一般形式是线性齐次的，它的解具有可叠加性，这一步骤的目的其实是把扰动后的波分解成三个。画一维示意图如下：

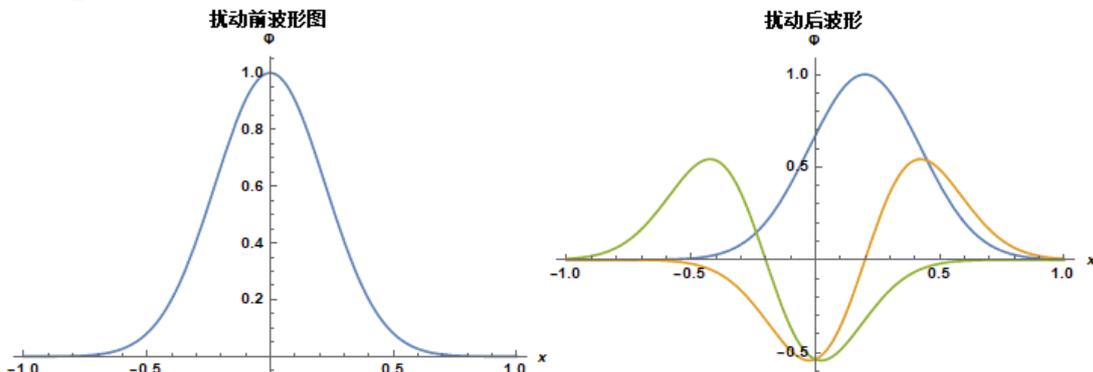


图8.扰动前后波形图的变化。图中各参数的取值：扰动发生在 $t_0 = 0$ 时刻，为了便于区分三个波形，图中显示的是 $t = 0$ 时刻的情况。 $c_0 = 1$ ， $\alpha = 0.4$ 。蓝色代表扰动前波形和扰动后波形的第一项，黄色代表扰动后波形的第二项，绿色代表扰动后波形的第三项。



这样，在受到扰动之后，波的状态突变可以重新描绘成以下等效的物理图景：在传播过程中，水波未受到扰动，波动方程保持一般形式不变。但在某一时刻 t_0 ，波的初始条件却发生了突变。由原来的一束波分裂成了三份，其中一份（第一项）与原来的波形完全相同，继续向前扩散；另一份（第二项）可以视作系数 $\alpha/2$ 乘以原来的波形对时间的导数；最后一份（第三项）与第二份类似，唯一的不同之处是多了个负号。而这个负号，恰恰可以看作是附在时间变量 t 上的。换句话说，第二份波和第三份波几乎相同，其间的区别仅在于第三份的时间反向了，感觉上就如同是发生了“时间回溯”的现象。正因如此，在实验中才观察到扰动后往回传播的波形，此波形与初始的波形之间存在着某种对应关系。

下面进一步研究该对应关系。为了简单起见，先讨论平面单色波，其形式可以写作

$$\phi(\mathbf{r}, t) = A \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (14)$$

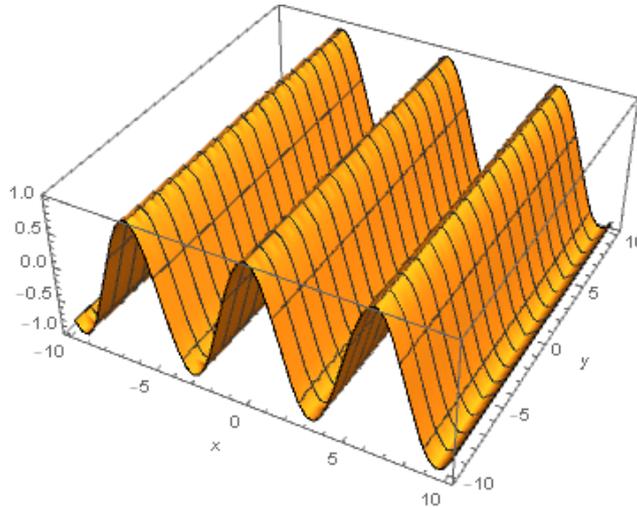


图9.单色平面波的波形图。图中各参数的取值： $A = 1$ ， $\omega = 1$ ， $k = 1$ ， $t = 0$ 实部图像如上图所示。在 t_0^- 时刻，对该波形求导得，

$$\phi(\mathbf{r}, t_0^-) = A \exp[i(\omega t_0^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) = \omega A \exp\left[i\left(\omega t_0^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) = \omega^2 A \exp[i(\omega t_0^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \pi)] \quad (17)$$

将其代入微扰后的初始条件，得到波形表达式和图像如下：

$$\phi(\mathbf{r}, t_0^+) =$$

$$A \exp[i(\omega t_0^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \frac{\alpha}{2} \omega A \exp\left[i\left(\omega t_0^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{\alpha}{2} \omega A \exp\left[i\left(\omega t_0^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^+) =$$

$$\omega A \exp\left[i\left(\omega t_0^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{\alpha}{2} \omega^2 A \exp[i(\omega t_0^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \pi)] + \frac{\alpha}{2} \omega^2 A \exp[i(\omega t_0^- - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \pi)] \quad (19)$$

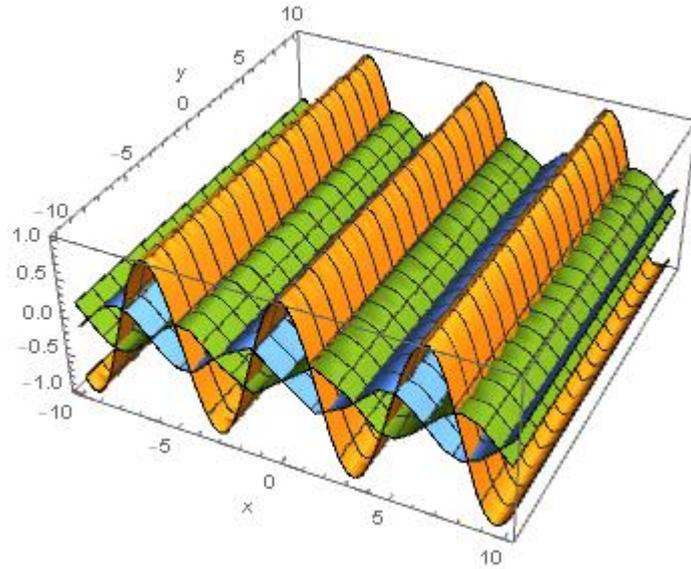


图 10.微扰后的波形图。其中各参数的取值: $A = 1$, $\omega = 1$, $k = 1$, $t = 0$, $\alpha = 0.6$ 。黄色代表扰动前波形和扰动后波形的第一项, 蓝色代表扰动后波形的第二项, 绿色代表扰动后波形的第三项。

显然, 从表达式可以看出, 与第一项(初始的波形)相比, 第二项仅仅是把振幅变成了 $\alpha\omega/2$ 倍, 且由于存在 $\pi/2$ 的相位差, 时间向前倒退了 $\pi/(2\omega)$, 但波的传播方向和传播过程没有任何变化, 因而这一束波将随着原来的波一起向前扩散。

现取出第三项作为新的初始条件, 重新代入波动方程的一般形式, 并把得到的解称为回溯波, 记作符号 ψ , 解得

$$\psi = \frac{\alpha}{2} \omega A \exp \left[-i \left(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (20)$$

上式有趣的结果表明, 第三项与原来的波相比, 除了振幅变为 $\alpha\omega/2$ 倍, 时间向前倒退了 $\pi/(2\omega)$ 之外, 更关键的一点是, 波矢 \mathbf{k} 指向了完全相反的方向。换句话说, 在保证波形不变的情况下, 波的传播方向彻底反向了! 正因如此, 也就出现了看上去恍如“时间回溯”的现象。

由于任何波形的波经过傅里叶变换后都能展开成一系列不同频率的正弦波的叠加, 因此上述的论述对任何波形都是适用的。只不过, 由于每一个正弦波在经过扰动后, 其振幅都要乘上一个自己的频率, 因此再逆傅里叶变换回去后, 扰动后的波形不一定与扰动前的波形完全相同, 而是会发生一定的扭曲。但毫无疑问, 在扰动前和扰动后的波形之间, 总能建立一一对应的关系。

下面继续深入探讨一维情况下, 这种一一对应关系的具体形式。对于一般形式的一维波动方程, 其通解都可以写成如下的结果:

$$\phi(x, t) = f \left(t - \frac{x}{c} \right) + g \left(t + \frac{x}{c} \right) \quad (21)$$

其中, f 和 g 都是任意的函数。等式右侧第一项表示向右传播的波, 第二项表示向左传播的波。我们在这里考虑一个形状任意的向右传播的波, 这样一来, ϕ 必定可以表示成 $(t - x/c)$ 这个整体的函数。在将原来的波形进行傅里叶变换后, 得到

$$\phi \left(t - \frac{x}{c} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} d\omega \quad (22)$$

其中, 根据傅里叶变换的公式, 每个正弦波前的系数为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi \left(t - \frac{x}{c} \right) e^{-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right)} d \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (23)$$



这也就是原波形的频谱。按照上文得到的扰动前后波形的变换关系，为了得到扰动后的波形，我们仅需要把傅里叶变换中的每个正弦波分别乘以系数 $\alpha/2$ 和自身的角频率，再把e指数上的+ i 改变为 $-i$ ，最后将 $(t - x/c)$ 这个整体替换成 $(t + x/c)$ ，即构成了回溯波形。把这个写作算术表达式：

$$\psi\left(t + \frac{x}{c}\right) = -\frac{i\alpha}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\omega e^{-i\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)} d\omega \quad (24)$$

上式便是回溯波的波形函数。不难看出，回溯波显然是 $(t + x/c)$ 这个整体的函数，换句话说，此波必定是向左传播的，正好与初始波的方向相反。注意到，傅里叶变换具有一个美妙的性质，即变换本身是线性的，所以有导数关系：

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(x)] = F(\omega) \quad (25)$$

$$\text{则 } \mathcal{F}[f'(x)] = i\omega F(\omega) \quad (26)$$

根据这个性质，可以进一步整合回溯波的函数表达式，得到如下漂亮的结果：

$$\psi\left(t + \frac{x}{c}\right) = -\frac{\alpha}{2} \phi'\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (27)$$

其中， $\phi'\left(t + \frac{x}{c}\right)$ 表示 $\frac{d\phi}{d(t-x/c)}$ ，并在最终表达式里用 $\left(t + \frac{x}{c}\right)$ 替换 $\left(t - \frac{x}{c}\right)$ 后的结果。这意味着，回溯波形和初始波形之间的关系是如此的巧妙——恰恰是自然界对波形完美地求了一次导数！

最后，为了使上述的内容更形象化一些，举一个简单的例子。我们来观察一个高斯波包的传播和扰动过程。初始时，假设高斯波包的表达式和函数图像为（忽略单位）

$$\phi\left(t - \frac{x}{c}\right) = \exp\left(-\left(t - \frac{x}{c}\right)^2\right) \quad (28)$$

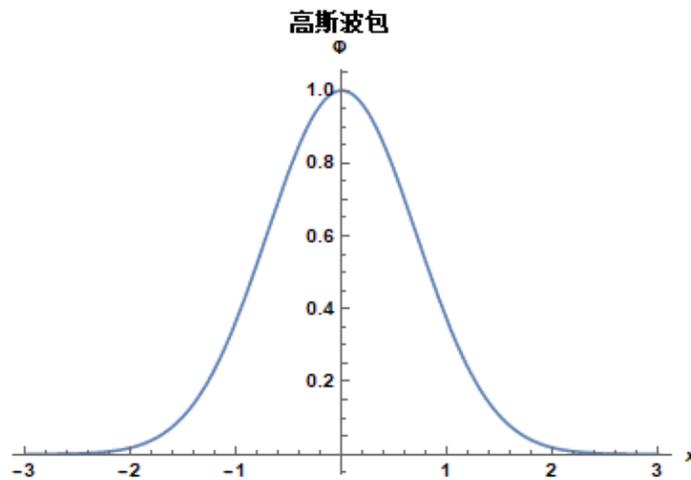


图 11.初始下的高斯波包。图中各参数的取值： $t = 0$ ， $c = 0$

经过傅里叶变换后，得到的频谱函数是

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(t - \frac{x}{c}\right) e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} d\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ &= -\sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} \end{aligned} \quad (29)$$

这样，最终算出（或直接对原波形求导得到）的回溯波形的表达式和图像是



$$\begin{aligned} \psi\left(t + \frac{x}{c}\right) &= -\frac{i\alpha}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\omega e^{-i\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)} d\omega \\ &= -\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) \exp\left(-\left(t + \frac{x}{c}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (30)$$

回溯波形

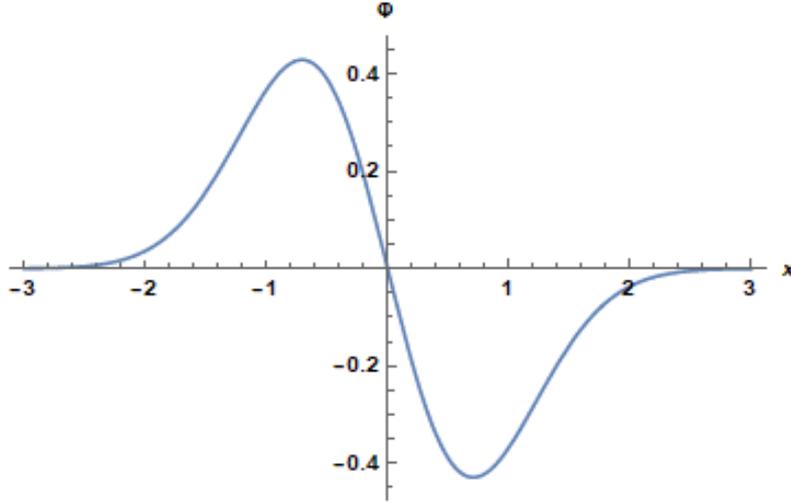


图 12.微扰后回溯的波形。图中各参数的取值：图示时刻 $t = 0$, $c = 0$, $\alpha = 1$ 。

注意到，理论计算出的回溯波形和原波形之间确实有所区别。把高斯波包代入 Mathematica 数值求解含速度扰动的波动方程，再将上图与直接电脑模拟的结果进行比较：

模拟扰动后波形

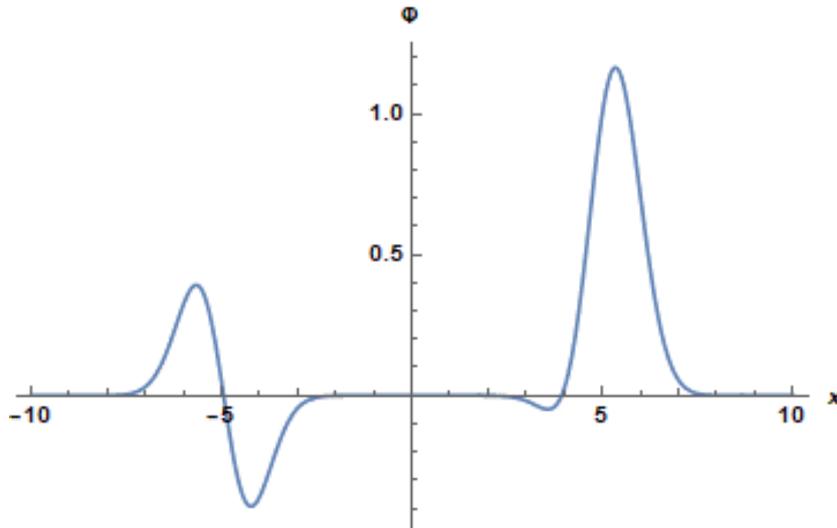


图 13.微扰后高斯波包的波形分布。图中各参数的取值：扰动时刻 $t_0 = 0$, 图示时刻 $t = 5$, $c = 0$, $\alpha = 1$ 。

图中所示发生在扰动之后一段时间，此时向相反方向传播的两支已经完全分离了。波形的左支代表回溯波，也就是我们关心的部分，而波形的右支是透射波，它的形状与原波形也不完全相等。值得注意的是，此处模拟的计算结果与上文中理论的计算结果完全一致——不仅仅是波的形状一模一样，波的宽度以及振幅都毫无区别。这便极好地支持了上文中的求导波形理论。



3.3 数值模拟

根据上一节中建立的理论模型，我们可以直接对预实验中的物理场景进行数值模拟：即一个水滴在水面上的扩散。其具体的结果见视频 Video3。在文章中，如图 14 所示，我们取视频中不同时间下的截图，就能够清楚的看到时间反演现象的出现，并且与实验现象高度吻合。这说明了我们的物理模型针对这样的现象是合理且有效的。

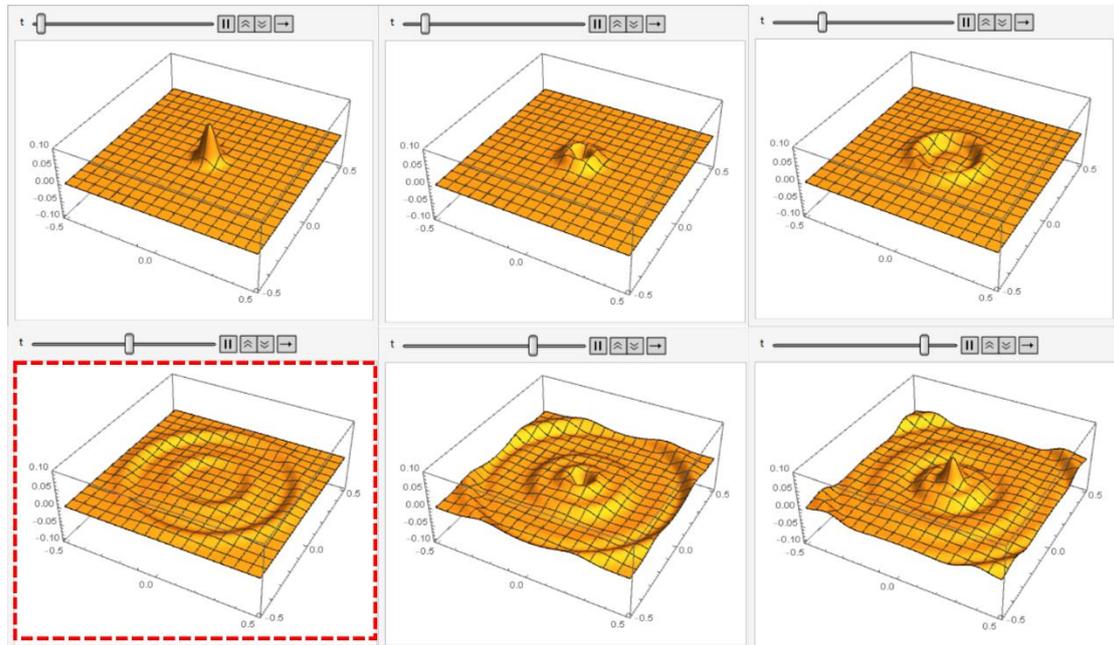


图 14.数值模拟下，水滴形成的波纹在扰动中实现了时间反演——最后重新回到了中心。红色框标明出来的时刻正好是施加微扰的时刻。

除此之外，也正如上一节所讲的，由于求解这部分方程的过程中，我们仅仅用的是波动方程——因此，必定满足叠加原理。即空间中任意一个 source 的扩散都可以在同样的调制下面发生时间反演，则总的时间反演场就是不同 source 之间的叠加。在这里，为了验证这一点，我们采取了两种不一样的激发模式：第一种，如图 15 所示，我们将水滴的数目增加到三个，计算的结果显示，任何一个单独的水滴都能够很好的实现时间反演；第二种，我们直接将之前的点扩散模型换成任意一个具体的图形，譬如，在图 16 中，我们即选择的是一个心形。计算的结果显示，就算对于这样一个较为复杂的结构，时间反演依旧能够非常精确地将其重构出来，这说明了这一奇特物理效应很好的满足了叠加原理，同时整个系统具有很好的稳定性。

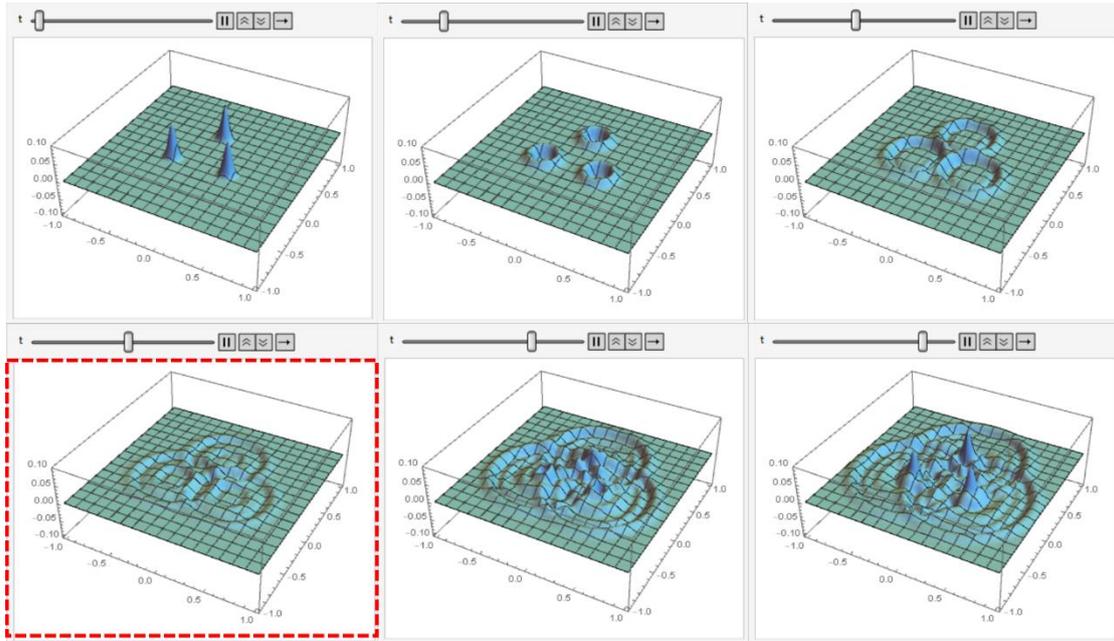


图 15.数值模拟下，三个离散的水滴形成的波纹在扰动中实现了时间反演——最后都重新回到了中心。红色框标明出来的时刻正好是施加微扰的时刻。

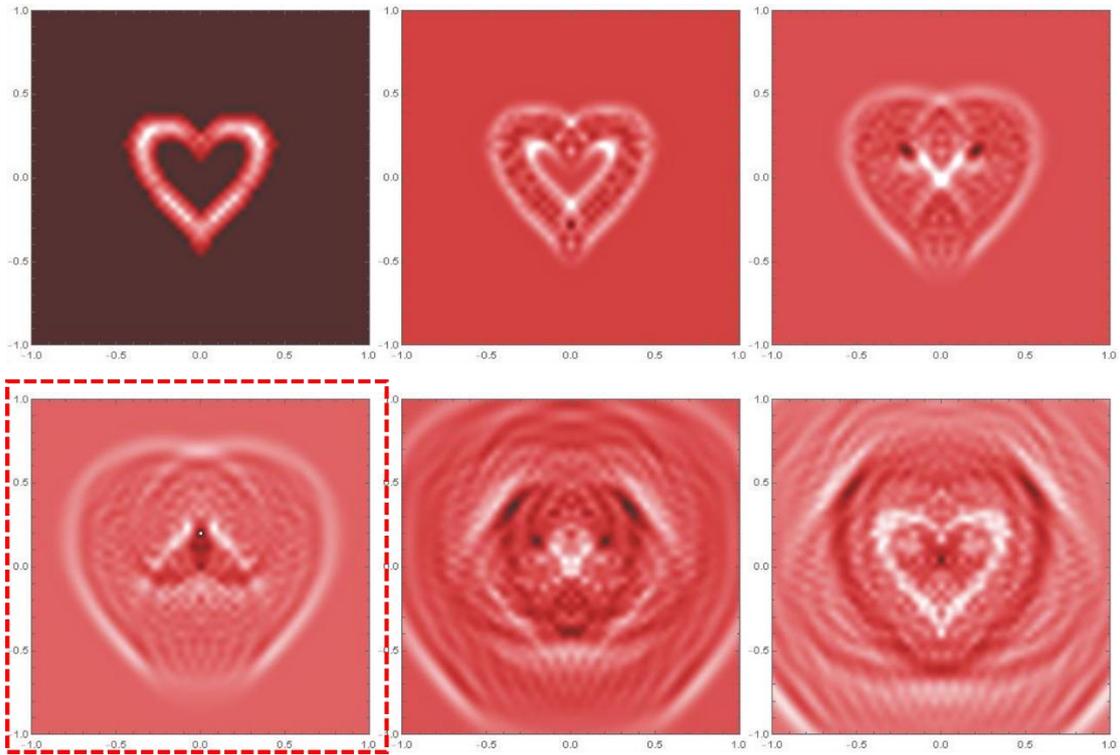


图 16.数值模拟下，心性的水滴形成的波纹在扰动中实现了时间反演——最后都重新拼出来一个心形的模样。红色框标明出来的时刻正好是施加微扰的时刻



4 定量实验验证

由于之前的系统只能进行定性的测量，这里，在之前的震动平台的基础上，我们考虑引入激光光路，用精密光学测量手段使得我们能够定量的研究该体系。

4.1 利用激光束阵列实时测量水波

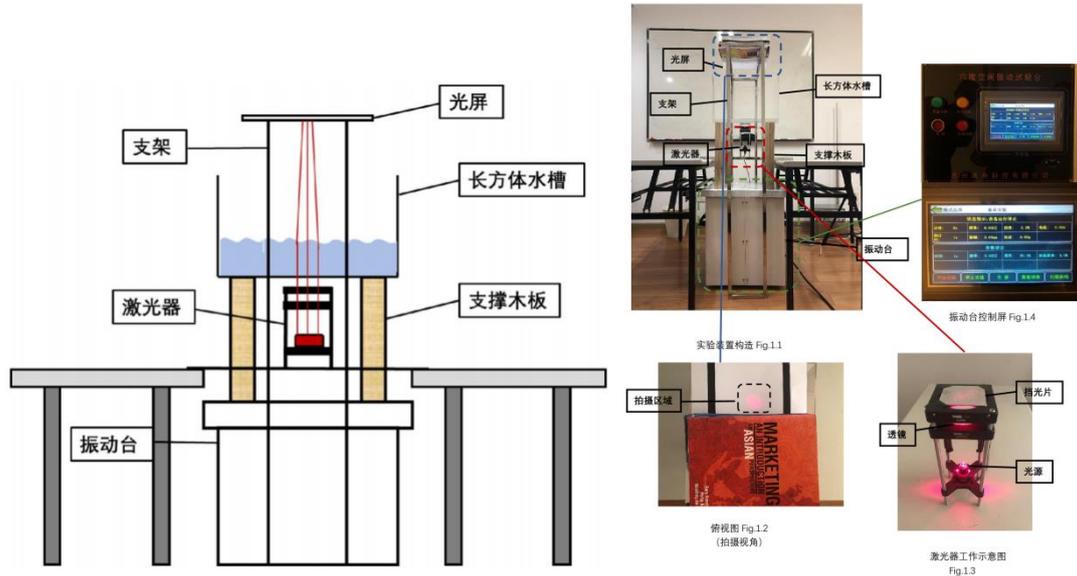


图 17.激光光束测量的示意图（左）；装置的整体照片（右）

如图 17 所示，我们在本次实验中改进了实验装置。具体地说，将激光发射器从水面上方调整到了水面下方。为达到此效果，我们现将水缸中的水清空，将水缸从振动台上取下。然后，利用木板搭建支架：将四个大小相同的木板用强力双面胶树立着固定在振动台上，再将水缸固定在木板上，木板在水缸四角起到支撑作用。然后，将一硬纸板凌空从振动台与水缸间穿过并固定在两侧的桌子上，将激光发射器向上放置在木板上。在水缸开口处用透明胶带固定一张 A4 白纸作为暂时光屏。装置固定好后即开始试验。

试验时关闭灯光，接通电源使得激光源位于凸透镜焦点处，汇聚成平行光向上传播。在光路上放置带有小孔的挡光板，使得光屏上清晰呈现点阵效果，如图 18 所示。

首先探究点波源自由扩散时光屏上图像能否清晰变化。用滴管向水缸一角滴水，在波向外传播的同时在上方拍摄光屏上图像的变化。实验结束后观察视频效果，实验效果见视频 Video4。视频中能较清晰地观察到水波单向传播的过程，在这里，我们同样是截取视频中的数个片段，见图 19。于此同时，我们也能够用同样的方法实时地追踪水波回溯，即发生了时间反演的过程，见图 20。

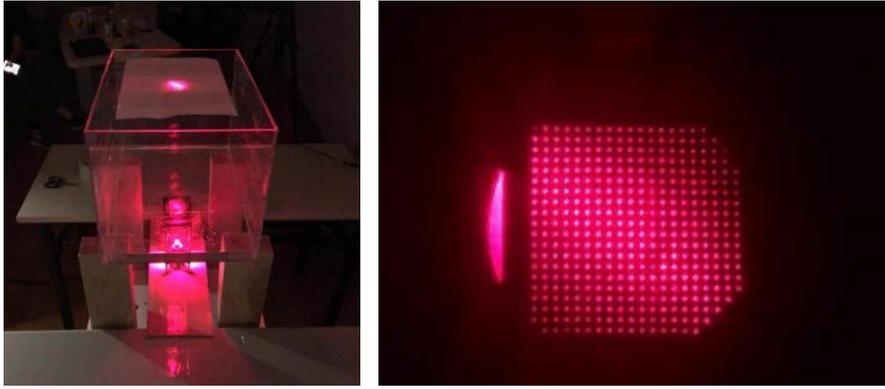


图 18. 黑暗中呈现的激光及点阵效果

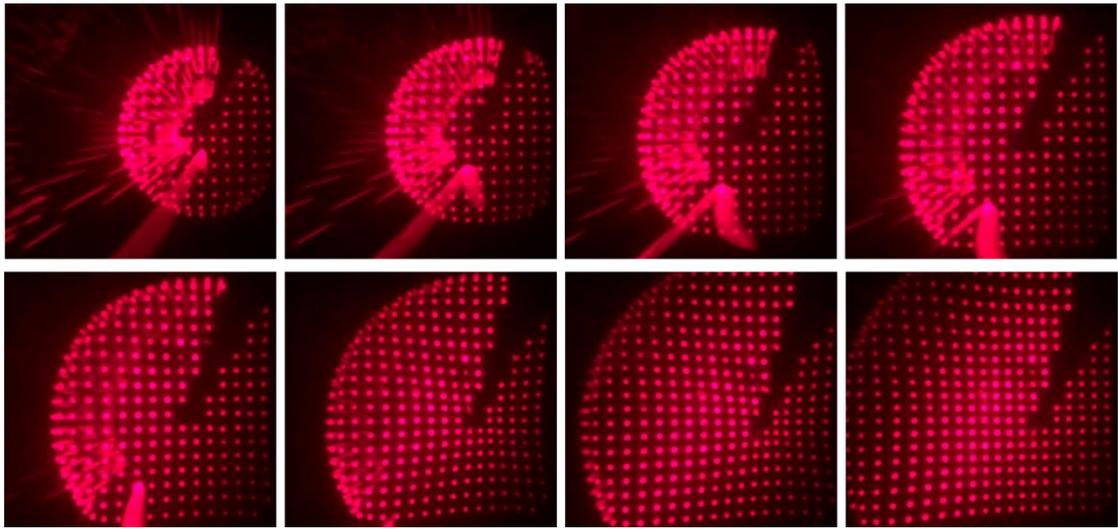


图 19. 用激光点阵实时追踪得到的水波扩散的过程

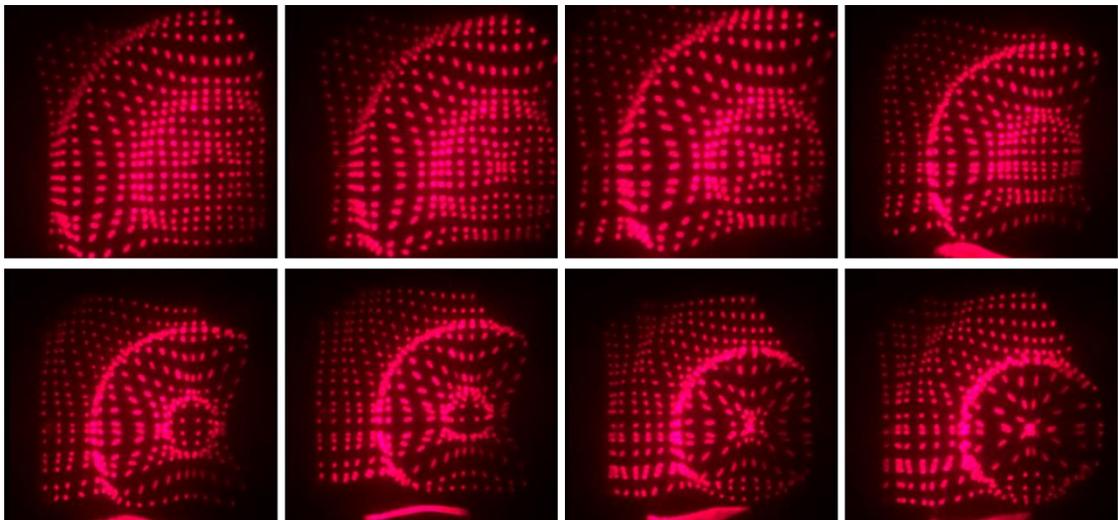


图 20. 用激光点阵实时追踪得到的水波发生时间反演的过程



4.2 时间反演测量结果

我们尝试运用 tracker 软件分析点阵中各点位置以及点间相对位置随时间变化关系，再由该变化关系结合折射定律反推出激光照射区域水波波形随时间变化关系。具体的算法见附录二。我们对回溯过程中的一段波形进行的反推波形，其具体结果如图 21 所示。可以看到，我们从反推的波形中可以很好的看出来水波的回溯过程。这说明我们的测量方式和数据处理手段都是正确的。

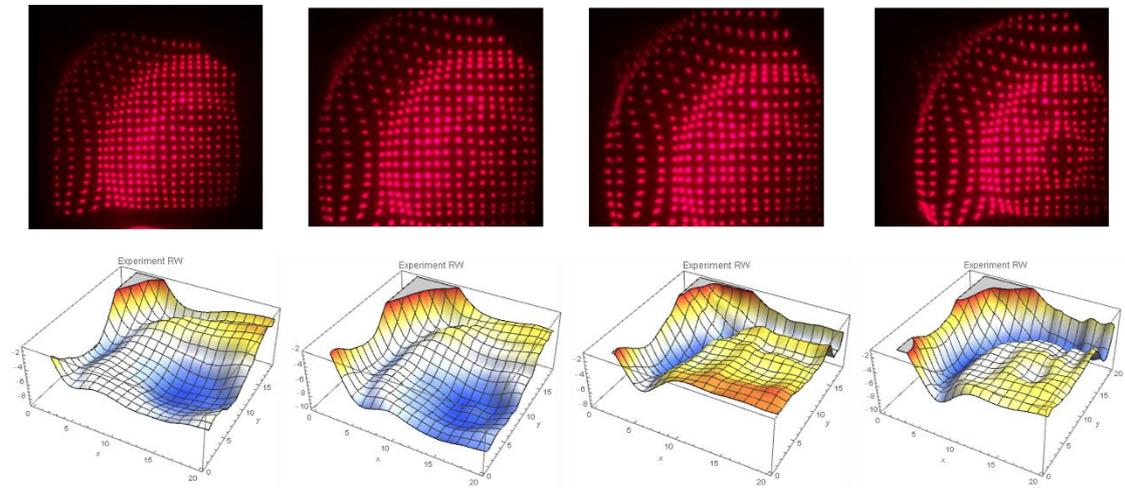


图 21. 用激光点阵实时追踪得到的水波发生时间反演的过程以及根据算法所反推出来的水面波形。

4.3 理论与实验的对比

我们对反推出来的波形和之前模拟计算得到的波形做一个对比，其结果如图 22 所示，可以看到，二者的趋势基本吻合，这直接证实了我们的实验和理论都是合理且正确的。我们将这一物理现象从两个方面都得到了验证，而且最终完美自治。

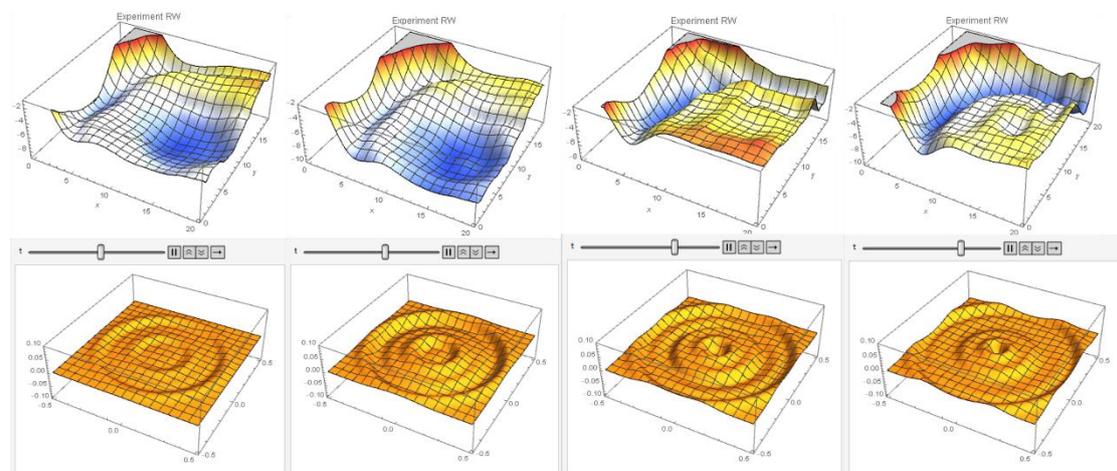


图 22. 根据算法所反推出来的水面波形和模拟过程中的波形对比。



5 时间反演现象的进一步探究

这里，我们从基本的时间反演现象出发，进一步挖掘该实验的物理意义。

5.1 广义的“时间反射/折射定律”

先考虑一维单色波模型。设一列以速度 c 向右匀速传播的单色波的方程为

$$\phi = A \exp[ik(x - ct)] \quad (31)$$

现在，再次引入含速度扰动项的一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2(x, t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (32)$$

与上文的不同之处是，此处波速不一定仅仅是时间的函数，也可以依赖于空间位置。简单起见，设波速仅是关于时间的分段函数，满足下述关系

$$c^2 = \begin{cases} c_1^2 & t < t_0 \\ c_2^2 & t > t_0 \end{cases} \quad (33)$$

相当于在 t_0 时刻波速发生了突变。由于波动方程是一个关于时间的二阶偏微分方程，只要知道了在某一时刻波的位形以及波的位形对时间的一阶偏导数，则波就被完全确定下来了。由于上述的波速一直是有限大的，所以在发生突变的 t_0 时刻，对于任意一点 x ，都应有连续性条件

$$\phi(x, t_0^-) = \phi(x, t_0^+) \quad (34)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t_0^-) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t_0^+) \quad (35)$$

当 $t < t_0$ 时，波的方程为

$$\phi = A \exp[ik(x - c_1 t)] \quad (36)$$

当 $t > t_0$ 时，不妨设波突变为两列单色波的叠加

$$\phi = TA \exp[ik'(x - c_2 t)] + RA \exp[ik'(x + c_2 t)] \quad (37)$$

其中， T, R, k' 为待定系数。将其代入连续性条件，并保证对任意一点 x 都满足此关系，由此可以解得

$$k' = k \quad (38)$$

$$T = \frac{c_2 + c_1}{2c_2} \exp[ik(c_2 - c_1)t_0] \quad (39)$$

$$R = \frac{c_2 - c_1}{2c_2} \exp[-ik(c_2 + c_1)t_0] \quad (40)$$

这里， T 和 R 后面所附的指数函数项，是用来调节相位的零点的。不失一般性，我们不妨设 $t_0 = 0$ ，于是有

$$T = \frac{c_2 + c_1}{2c_2} \quad (41)$$

$$R = \frac{c_2 - c_1}{2c_2} \quad (42)$$

即经过扰动后，波的函数变为

$$\phi = A \left\{ \frac{c_2 + c_1}{2c_2} \exp[ik(x - c_2 t) + ik(c_2 - c_1)t_0] + \frac{c_2 - c_1}{2c_2} \exp[ik(x + c_2 t) - ik(c_2 + c_1)t_0] \right\} \quad (43)$$



不难发现, 这个结果与一列波经过两种介质的分界面后发生反射和折射的现象如出一辙地相似。在这里, $\frac{c_2+c_1}{2c_2}$ 可类比于折射系数, 而 $\frac{c_2-c_1}{2c_2}$ 可类比于反射系数。当 $c_1 = c_2$ 时, 折射系数为 1, 反射系数为 0, 相当于在无扰动的情况下, 波毫无阻碍地经过了时间节点, 此现象毫无疑问是显然的; 当 $c_1 \ll c_2$ 时, 折射系数为 $\frac{1}{2}$, 反射系数也为 $\frac{1}{2}$, 相当于一列波完美地平分成了两列, 一列向左传播, 一列向右传播。这一点也是显然的, 因为它其实相当于先将水面隆起一部分, 并用某种约束固定住, 以达到波速为零的效果, 再突然撤去约束。此时, 隆起的水面会因为对称性的缘故平分成两列完全一样的波形, 分别向相反的方向扩散; 而当 $c_1 \gg c_2$ 时, 奇妙的事发生了——折射系数和反射系数竟会分别趋于正无穷和负无穷, 这倒是一个挺诡异的现象。

不仅如此, 这个在时间界面上发生的反射和折射现象, 与真实的反射和折射, 还有更多内在的共通之处。不难注意到, 无论 c_1 和 c_2 如何取值, 折射系数始终是大于零的, 这意味着水波在经过扰动后, 沿原方向继续传播的波形与原来的始终是同向的。而反射系数则不然, 只有当 $c_1 < c_2$ 时是同向的, 而当 $c_1 > c_2$ 时便会彻底反向。这就与光波从光疏介质射到光密介质上时, 发生半波损失的现象如出一辙地相似。这里, 波速越小, 意味着这种“时间介质”越稠密。特别的, 当 $c_1 = 3c_2$ 时, 反射波的振幅将与入射波的完全相等, 仅仅是上下颠倒了一下。

由于任意波形经过傅里叶变换之后, 都可以化归为一系列三角函数的叠加, 因而上面所述的折射和反射现象对任意波形皆可适用。为了更具象地描绘这个现象, 让我们考虑一个实际的情景。设有一个以速度 c 向右匀速传播的高斯波包, 其方程如下:

$$\phi = A \exp\left[-\frac{(x - ct)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (44)$$

现以 x, t 为自变量, ϕ 为因变量, 建立三维直角坐标系, 画出高斯波包的函数图像。其中, 为了方便区分, 不同的颜色代表着不同的时刻。看上去就像是一个圆拱形的高斯波包向右上方连续平移所描绘而成的。可以用一个垂直于 t 轴的平面截此图像, 所得的截面也就是此瞬间波的位形图。这一步骤相当于是从时间层面上拓宽了一个维度。

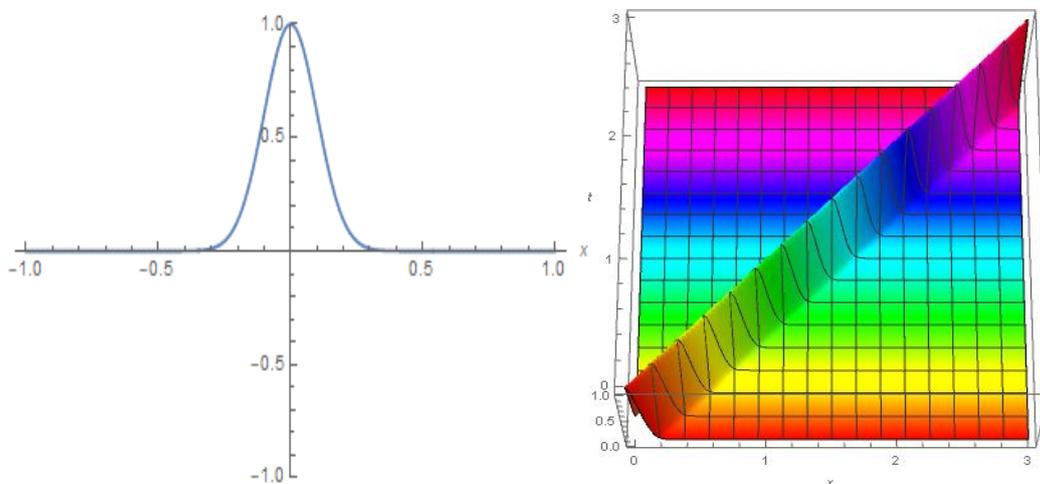


图 23.高斯波包的传播

现在, 让我们以 t_0 时刻作为分界, 按照上文所提到的那个分段函数, 把扰动前后的波速设置为两个不同的值。先不妨考虑 $c_2 > c_1$ 的情形, 代入 Mathematica 进行数值模拟, 将计算结果描绘成三维图和密度图, 如下所示:

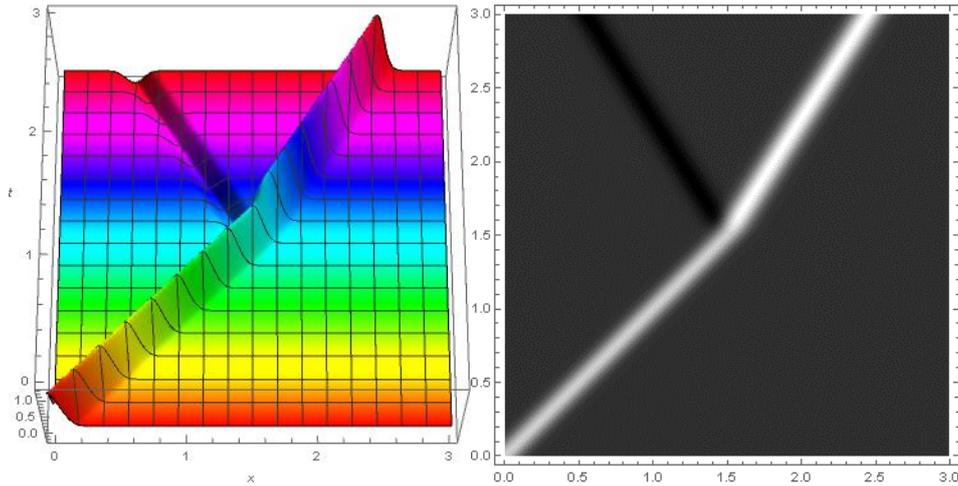


图 24.高斯波包传播过程中的“折射”和“反射”

将模拟结果在时空二维平面上画出后，奇妙的图景出现了——这两幅图看上去就和光线在两种介质的分界面处发生了折射和反射的现象几乎完全一样。如果说普通的反射、折射现象可以被描述成在空间界面上发生的，那此处便是在时间界面上波的反射-折射现象了。当然，有一个很明显的不同点在于，这种时间反射波，在图中并没有和入射波在同一区域内，而是跑到了折射波的地盘上。并且，假若这里可以用相似的方式定义入射角、反射角和折射角的话，那么并不存在常见的入射角等于反射角不等于折射角的关系，反而是反射角等于折射角不等于入射角。然而可惜的是，由于介质的波速在一个区域内是恒定的，所以入射角实际上是无法任意更改的，一旦波速确定了，角度也就随之定了下来。所以在这种意义下，折射率是无法定义的。

对于另一种 $c_2 < c_1$ 的情形，其图像如下所示：

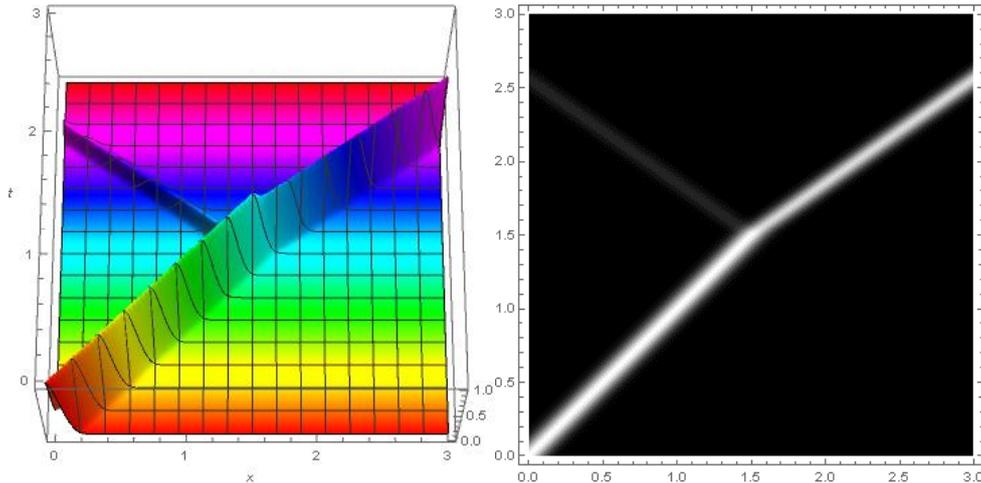


图 25.高斯波包传播过程中的“折射”和“反射”，此时 $c_2 < c_1$

结合上述两组图像，可以验证另外一个结论。不难看出，当 $c_2 < c_1$ 时，反射波和入射波是同向的；当 $c_2 > c_1$ 时，反射波和入射波确实是反向的。并且，这三种波的相对大小在图中也有刻画，它们始终满足振幅关系：入射波=反射波+折射波。

现在，从时间界面反射-折射的角度再次解释“时间回溯”现象。注意到，前文中用到狄拉克 δ 函数来模拟对水波的扰动，其本质上可以视作一个宽度无限窄，高度无限高的方波函数。我们先从一个正常的方波入手，如果将整段时间用两个界面分割成三个区域，对于首位的两个部分，水波的波速是正常的，都等于一个恒定的值。而中间的部分是扰动过程，此处水波的波速将会突变至一个极大的值。这样三个部分便构成了一个方波函数。把



这个模型代入 Mathematica 进行模拟，绘制三维图和密度图如下所示：

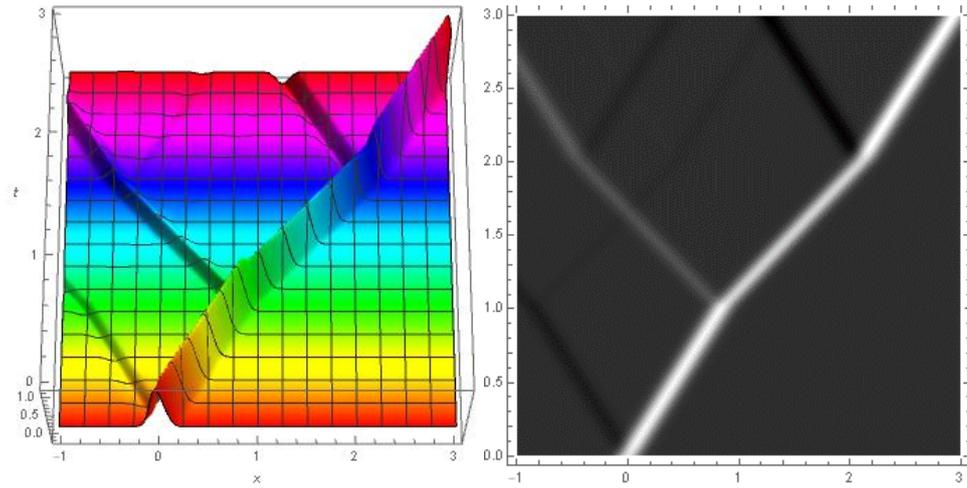


图 26. 高斯波包传播过程中的方波扰动

可以看到，由于对于每一列波，每一次扰动都会产生两个新波，所以仅仅是引入了两个界面，就已经使波形图变得如此复杂。现在，再进一步，为了逼近狄拉克 δ 函数的效果，需要不断减少中间扰动区域的时间间隔，并不断加大扰动区域的波速。重新将此带入计算机模拟，绘出图像如下：

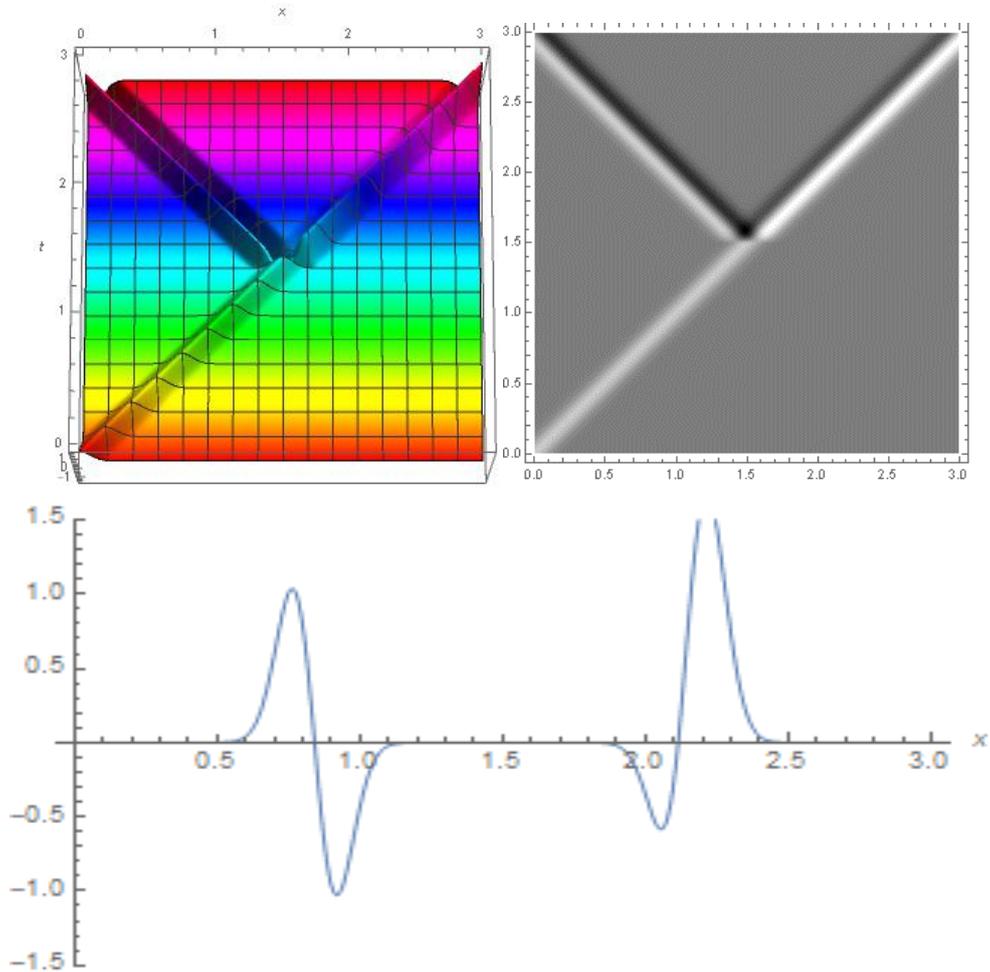


图 27. 高斯波包传播过程中的 δ 函数扰动



其中，第三幅图是实际上的观察结果。左支是反射波形，右支是折射波形。可以看出，此时，反射波和折射波都不再保持原有的圆拱形状了。这是因为波在经过两个界面时，分裂成了四束，其中两束沿着反方向扩散，并且由于进入疏密区域的先后顺序不同，会发生半波损失的缘故，这两束中的一束是与原波形方向相反的，而另一束则是保持着正向的，因而最后的结果才会变成图中的样子。下面，更定量地来描述一下这个现象：

设正常的水波波速为 c_0 ，方波函数的宽度为 Δt ，扰动过程中的波速为 kc_0 。为了和前文统一，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， Δt ， k 与 α 应当满足一定条件，使波速的平方可以间接过渡到前文中提到的狄拉克 δ 函数形式：

$$c^2 = c_0^2(1 + \alpha\delta(t - t_0)) \quad (45)$$

这样，为了使波最后能向相反方向传播，必须要经过一次反射和一次折射，其先后顺序决定了波形朝向的正负号。由此可以算出最后回溯波的回溯系数为

$$\begin{aligned} RV &= R \cdot T \\ &= \pm \frac{c_2 - c_1}{2c_2} \cdot \frac{c_2 + c_1}{2c_2} \\ &= \pm \frac{k^2c_0^2 - c_0^2}{4k^2c_0^2} \\ &= \pm \frac{k^2 - 1}{4k^2} \end{aligned} \quad (46)$$

另外，由于在经过中间扰动区域时，波会分裂成两束，朝相反方向传播，因而会形成一个小小的位置差。由上述参数可以推导出，这个位置差等于

$$\Delta x = 2kc_0\Delta t \quad (47)$$

正是这样的一个位置差和两个振幅相等、朝向相反的波形，构成了最终的回溯波。实际上，最终的波形与原始的波形不一致这一点，也是与前文相一致的。依照前文的方法，扰动前的波形先经过傅里叶变换之后形成一系列三角函数波，每一个三角函数波再分别乘上自己的频率，最终叠加在一起，便得到了扰动后的波形。而这一波形确实是与原波形有区别的，和这里通过折射-反射和反射-折射得到的最终波形完全一致。说明两种看待问题的角度是统一的。

这里，我们将正常的空间“反射/折射”定律和在时间反演过程中观测到的时间“反射/折射”定律做了一个性质的对比，列在了下面的表格里：

对比		
	时间界面-反射折射	空间界面-反射折射
连续性条件	$\phi_1 = \phi_2$ $\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi_2}{\partial t}$	$\phi_1 = \phi_2$ $\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}$
波矢-频率关系	$k_1 = k_2$	$\omega_1 = \omega_2$
反射系数	$\frac{c_2 - c_1}{2c_2}$	$\frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$
折射系数	$\frac{c_2 + c_1}{2c_2}$	$\frac{2c_2}{c_2 + c_1}$
反射率	$\frac{c_2(c_2 - c_1)^2}{4c_1^3}$	$\frac{(c_2 - c_1)^2}{(c_2 + c_1)^2}$
折射率	$\frac{c_2(c_2 + c_1)^2}{4c_1^3}$	$\frac{4c_1c_2}{(c_2 + c_1)^2}$



特殊情况	$c_1 \ll c_2$	反射系数 = $\frac{1}{2}$ 折射系数 = $\frac{1}{2}$	反射系数 = 1 折射系数 = 2
		反射率 = $+\infty$ 折射率 = $+\infty$	反射率 = 1 折射率 = 0
	$c_1 = c_2$	反射系数 = 0 折射系数 = 1	反射系数 = 0 折射系数 = 1
		反射率 = 0 折射率 = 1	反射率 = 0 折射率 = 1
	$c_1 \gg c_2$	反射系数 = $-\infty$ 折射系数 = $+\infty$	反射系数 = -1 折射系数 = 0
		反射率 = 0 折射率 = 0	反射率 = 1 折射率 = 0
半波损失 反射波与入射波相位差 π		条件: $c_1 > c_2$	条件: $c_1 > c_2$
*角度		反射角 = 折射角	反射角 = 入射角

现在，我们可以脱离一维情况，把波给推广到二维、甚至三维情境中去。不难想象，推广的结果将与一维相差甚小。如此一来，就可以把此现象看作是一个在四维时空中的波遇到一个时间界面后发生了折射-反射。

展望：在时间平面上发生折射-反射现象这一新的角度，给此问题带来了更多的启发。这种近似于普通折射-反射的现象，或许意味着更多类似于光学现象但又不完全是的结果，或许能在时间层面上得以实现。值得注意的是，上面所述的对于波速的讨论仅仅是关于时间的函数，但如果把这一限制去掉，使波速不仅可以与时间有关，也可以与位置有关。例如，下图就展示了与位置有关而产生的某种类似于“双缝”的现象：

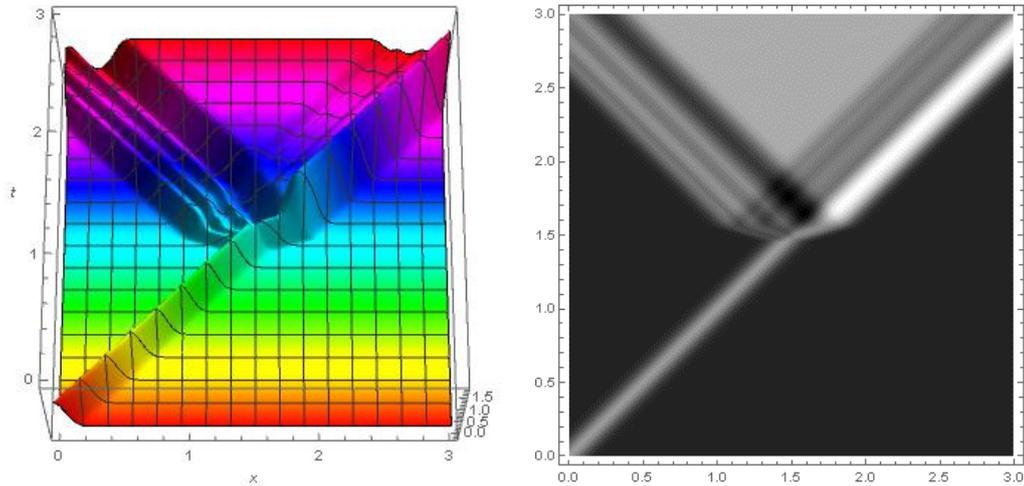


图 28.时间轴上的双缝干涉现象

5.2 时间反演中的能量不守恒

下面将展示一个很有意思的结果，即在扰动过程中，水波场的总能量是不守恒的。在本文的处理中，我们将水波方程简化成了一般的波动方程，换句话说，建模的基本假设之一是把水面近似成一层满足胡克定律的弹性膜。这样，仿照谐振子的形式，可以把水波场的能量密度分成势能密度和动能密度两个部分。其中，势能密度仅仅与波形有关，而动能密度仅仅与波高的变化率有关，且可近似地正比于波高变化率的平方（即谐振子速度的平方）。让我们回到最开始讨论的波形分为三份的方程式那里：

$$\phi(\mathbf{r}, t_0^+) = \phi(\mathbf{r}, t_0^-) + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) \quad (48)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^+) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) \quad (49)$$

显然，第一个式子表明，在扰动前后，整体的波形没有发生任何改变。因为水波场的势能密度仅仅依赖于波的形状，故在扰动前后，总势能是守恒的。相较之下，第二个式子表明，在扰动前后，水波高度的时间变化率发生了变化，也就是谐振子的速度改变了，所以一般情况下，总动能是不守恒的。假设水波场的动能密度正比于波高变化率的平方，比例系数记作 $\sigma/2$ ，可以得到动能密度

$$e_k = \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \quad (50)$$

这样，扰动前后增加的动能密度就等于

$$\begin{aligned} \Delta e_k &= \frac{1}{2} \sigma \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) + \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) \right]^2 - \frac{1}{2} \sigma \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) \right]^2 \\ &= \sigma \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) + \frac{1}{2} \sigma \alpha^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) \right]^2 \end{aligned} \quad (51)$$

对整个水波场进行面积分，得到系统的总动能变化量为

$$\Delta E_k = \iint \sigma \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) + \frac{1}{2} \sigma \alpha^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) \right]^2 dx dy \quad (52)$$



最后，我们来求一下动能的相对变化率，即总动能增量比初始总动能：

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{\iint 2\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) + \alpha^2 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t_0^-) \right]^2 dx dy}{\iint \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t_0^-) \right]^2 dx dy} \quad (53)$$

上式若想再进一步简化，就必须代入具体的波形表达式了。先直观地观察一下上式的结构，不难看出，当系数 α 远远大于波高的变化率时，总动能的相对变化率是与 α 成正相关的。这一点很好理解，毕竟 α 表征了扰动的强度。强度越大，供给的动能自然越多。尽管上式本质上很简单，但形式仍然过于复杂，我们考察一个具体的例子来对能量不守恒现象有一个直观认识。再次采用一个高斯波包，使其在初始状态下以速度 c 向右扩散，设此波在归一化后的标准差是 σ ，或简单地说， σ 是表征此高斯波包宽度的一个量。这样，波包的方程和函数图像如下所示：

$$\phi = A \exp \left[-\frac{(x - ct)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (54)$$

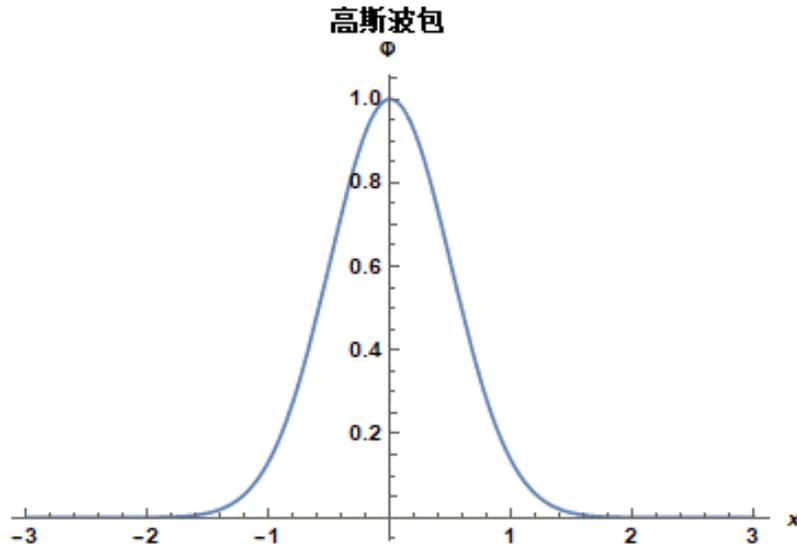


图 29.高斯波包。图中各参数的取值：图示时刻 $t = 0$ ， $A = 1$ ， $c = 1$ ， $\sigma = 0.5$

现假设在 $t = 0$ 时发生了扰动。此时，波高的时间变化率和波高的时间变化率的时间变化率分别为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{cA}{\sigma^2} (x - ct) \exp \left[-\frac{(x - ct)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (55)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{c^2 A}{\sigma^2} \left(\frac{(x - ct)^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp \left[-\frac{(x - ct)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (56)$$

将时刻 $t = 0$ 代入，得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{cA}{\sigma^2} x \cdot \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right] \quad (57)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{c^2 A}{\sigma^2} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right] \quad (58)$$

因此，代入总动能的相对变化率表达式中，



$$\begin{aligned} \frac{\Delta E_k}{E_k} &= \frac{\int 2\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)^2 dx}{\int \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx} \quad (59) \\ &= \frac{\int \left[2\alpha c \left(\frac{x^3}{\sigma^2} - x \right) + \alpha^2 c^2 \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right)^2 \right] \exp \left[-\frac{x^2}{\sigma^2} \right] dx}{\int x^2 \exp \left[-\frac{x^2}{\sigma^2} \right] dx} \\ &= \frac{3\alpha^2 c^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

最终我们获得了一个简洁而优美的式子。动能的相对变化率仅仅与扰动强度 α 、波速 c 、和高斯波包宽度 σ 有关。并且，它不仅仅与扰动强度的二次方成正比，也与水波波速的二次方成正比，即随着波速变大，动能的相对变化量将大幅增加，这一点是意料之外的。除了这个，还不难看出，动能的相对变化率与波形的宽度成二次方反比，即波形越窄，动能的相对变化量越大，将它们的函数关系作图如下：

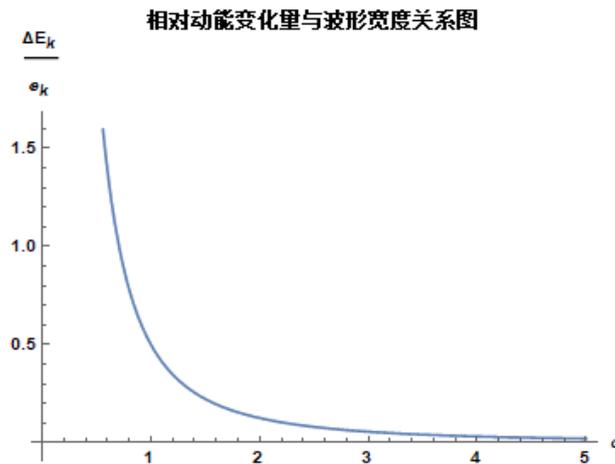


图 30.相对动能变化量与波形宽度关系图。图中各图中各参数的取值： $\alpha = 0.1$ ， $c = 1$ 。

对于其它种类的波形，上述的结论也近似地、定性地成立，虽然具体函数关系有少许区别，但其相对趋势应是一模一样的。由此，最后再总结一下几个参数之间的关系：相对动能变化量与扰动强度成正相关，与波速成正相关，与波形宽度成负相关。

6 总结与讨论

在本篇论文中，我们系统的研究了水波扩散过程中，在震动微扰的调制下，发生了时间反演的现象。为了定量的研究这一奇特的物理现象，理论上我们从波方程开始独立的推导，完整地将整个扩散和反演的动力学模型建立了出来；实验上，我们调研文献，利用精密的激光光场测量，实时地追踪了整个扩散和反演的过程，并用相关算法将水波的实时波形给测量了出来。实验测量得到的数据和理论推导高度吻合，这证实了我们这篇论文的物理模型和实验手段都是准确且有效的，即我们对于时间反演这一奇特物理现象的理解是充分且正确的，对于实验的测量也是科学的。最后，我们从基础的现象出发，但是不仅仅停留在波形回溯这一基本表象。我们还通过理论推导计算了在这样一个过程中体系中的能量不守恒性质。更为



国际竞赛 科研科创 发表论文
关注“有方背景提升”

有意思的是，我们还发现了这样的一个过程可以等效地看作是一种广义上的“时间反射/折射”定律。我们将这样一个过程的性质总结出来，发现和传统的空间反射/折射定律具有高度的对称性，令人非常吃惊。我们相信，我们的研究成果是具有一定创新能力和学术价值的，也会为今后的研究提供一定的借鉴。



参考文献

- [1] Fink M. Time reversal of ultrasonic fields. I. Basic principles[J]. IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, 1992, 39(5): 555-566.
- [2] Fink M, Montaldo G, Tanter M. Time reversal acoustics[C]//IEEE Ultrasonics Symposium, 2004. IEEE, 2004, 2: 850-859.
- [3] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 高等教育出版社, 2008.

致谢

论文即将完成之际,感慨万千,选题的纠结,搭设备的辛苦,实验现象拍不清晰的郁闷,算法卡壳时的崩溃,都成了云淡风轻的过往。若不是得到了太多人的帮助,我们的论文报告肯定不是今天的模样,所以,谨借这一张薄薄的A4纸,呈上我们对所有帮助过我们的人最深厚的感谢!

首先,感谢潘志民老师和王思慧教授,他们专业知识扎实,治学严谨,视野开阔,思维敏锐,指导经验丰富。我校物理大拿潘志民老师面沉如水其实菩萨心肠,从选题到实验设计到算法研究到论文写作,每一步都有他的耐心指点和无私关怀。来自南京大学的王思慧老师温柔中带着严格,每次开组会,总是笑眯眯地答疑解惑,同时也提出新的要求,鞭策着我们精益求精,不断前进。在此,谨向两位指导老师无私的帮助致以崇高的敬意和诚挚的谢意!

其次,感谢物理,让我们三个对它有着浓厚兴趣的中学生能走到一起,成为一个团队。从参加中学生青年物理学家比赛到组队做丘成桐竞赛,我们三个人的配合越来越默契,合作越来越愉快。选题阶段各抒己见碰撞出火花,实验期间齐心协力搭设备想办法拍到清晰的实验结果,论文撰写阶段彭澹明彻夜推敲理论研究算法,樊亦扬处理数据算到眼花,刘若辰拍照画图精益求精。一个人在物理科学的探究之路上也许可以走得很快,但我们三个人齐心协力,相互帮助一定可以走得更稳、更远。

同时,感谢曹毅教授、迈塔光电、陈强教授在实验器材搭建期间给予我们的支持和帮助;感谢在论文中被我们引用或参考的论著的作者;感谢父母无私的关爱和时时的慰藉。在未来的时间里,惟有笃行致远,砥砺前行,才能不负师长厚爱。

最后,感谢为审阅这篇论文付出时间和精力专家老师们!



国际竞赛 科研科创 发表论文
关注“有方背景提升”

学术诚信声明

本研究团队郑重声明：所提交的参赛论文是在指导老师的指导下，独立进行研究工作并取得的成果，所有数据真实可靠，除文中已注明引用的内容外，本论文不包含他人享有著作权的内容，若有不实之处，研究团队所有成员愿意承担一切相关责任。

参赛队员 彭澹明 樊亦物 刘若辰

2019年9月14日



附录

附录 1——物理模型

针对于简单的水滴:

```
Remove[H, L, T, h0, c2, solution, h, animation];
L = 2;
T = 1;
h0[x_, y_] := E^(-200 x^2 - 200 y^2);
c2[x_, y_, t_] := Piecewise[{{1, -0.05 < t < 0.05}}, 0.1];
solution =
  NDSolve[{D[h[x, y, t], {t, 2}] -
    c2[x, y, t]*(D[h[x, y, t], {x, 2}] + D[h[x, y, t], {y, 2}]) == 0,
    h[x, y, -T] == h0[x, y], Derivative[0, 0, 1][h][x, y, -T] == 0},
    h, {x, -L, L}, {y, -L, L}, {t, -T, T}]
h = h /. solution[[1]];
animation =
  Animate[Plot3D[h[x, y, t], {x, -L/2, L/2}, {y, -L/2, L/2},
    PlotRange -> 1, PlotPoints -> 50,
    PlotStyle -> {RGBColor[0.486275, 0.819608, 0.980392]}], {t, -T, T}]
```

针对于复杂图形:

```
Remove[H, L, T, e, h0, c2, solution, h, animation];
L = 2;
T = 1;
e1 = 0.4;
e2 = 0.3;
h0[x_, y_] := If[((4 y)/(3 e1) + 1/3 - Power[(x/e1)^2, (3)^-1])^2 + (x/e1)^2 <= 1 && ((4 y)/(3
e2) + 1/3 - Power[(x/e2)^2, (3)^-1])^2 + (x/e2)^2 >= 1, 1, 0]
c2[x_, y_, t_] := Piecewise[{{1.5, -0.05 < t < 0.05}}, 0.3];
solution = NDSolve[{D[h[x, y, t], {t, 2}] - c2[x, y, t]*(D[h[x, y, t], {x, 2}] + D[h[x, y, t], {y, 2}]) ==
0, h[x, y, -T] == h0[x, y], Derivative[0, 0, 1][h][x, y, -T] == 0}, h, {x, -L, L}, {y, -L, L}, {t, -T, T}]
h = h /. solution[[1]];
Do[pic = DensityPlot[h[x, y, t], {x, -L/2, L/2}, {y, -L/2, L/2}, PlotRange -> 1, PlotPoints -> 100,
PerformanceGoal -> "Quality", ColorFunction -> "CherryTones"];
Export["C:\Users\Daniel\Desktop\models\Mathematica\Water Wave\simulation\output\" <>
ToString[IntegerPart[10 t + 10]] <> ".jpg", pic]; Print[10-10t], {t, -T, T, 0.1}]
```



附录 2——实验模型

从点阵分布反推实际的水面形貌：

```
ClearAll;
a = 20;
b = 20;
data0 = Import[
  "C:\\Users\\Daniel\\Desktop\\Reversal \\
  Wave\\Experiment\\0.xlsx"];
data1 = Import[
  "C:\\Users\\Daniel\\Desktop\\Reversal \\
  Wave\\Experiment\\1.xlsx"];
dots = Table[0, a*b];
amplify = 50;
For[i = 1, i <= a, i++,
  For[j = 1, j <= b, j++,
    offset =
      amplify*(data1[[1, (j - 1)*a + i, 1]] -
        data0[[1, (j - 1)*a + i, 1]]);
    dots[[{(j - 1)*a + i}] = {{i, j}, offset}}];
zx = Interpolation[dots, InterpolationOrder -> 5];
For[i = 1, i <= a, i++,
  For[j = 1, j <= b, j++,
    offset =
      amplify*(data1[[1, (j - 1)*a + i, 2]] -
        data0[[1, (j - 1)*a + i, 2]]);
    dots[[{(j - 1)*a + i}] = {{i, j}, offset}}];
zy = Interpolation[dots, InterpolationOrder -> 5];
Plot3D[zx[x, y], {x, 1, a}, {y, 1, b}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> "\[PartialD]z\[PartialD]x",
  ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.}, BoxRatios -> Automatic]
Plot3D[zy[x, y], {x, 1, a}, {y, 1, b}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> "\[PartialD]z\[PartialD]y",
  ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.}, BoxRatios -> Automatic]
zxy = Derivative[0, 1][zx];
zyx = Derivative[1, 0][zy];
Plot3D[{zxy[x, y], zyx[x, y]}, {x, 1, a}, {y, 1, b}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> Automatic,
  PlotLabel ->
  "\!\(*SuperscriptBox[\(\[PartialD]\), \{2\}]\)z\[PartialD]x\
\[PartialD]y, \!\(*SuperscriptBox[\(\[PartialD]\), \{2\}]\)z\
\[PartialD]y\[PartialD]x", ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.},
  BoxRatios -> Automatic]
```



```
Remove[Z, Z0, Z1, Z2];
NDSolve[{D[Z0[x], x] == zx[x, 1], Z0[1] == 0}, Z0, {x, 1, a}];
Z0 = Z0 /. %[[1]];
NDSolve[{D[Z1[x, y], y] == zy[x, y], Z1[x, 1] == Z0[x],
  Z1, {x, 1, a}, {y, 1, b}}];
Z1 = Z1 /. %[[1]];
Remove[Z0];
NDSolve[{D[Z0[y], y] == zy[1, y], Z0[1] == 0}, Z0, {y, 1, b}];
Z0 = Z0 /. %[[1]];
NDSolve[{D[Z2[x, y], x] == zx[x, y], Z2[1, y] == Z0[y]},
  Z2, {x, 1, a}, {y, 1, b}}];
Z2 = Z2 /. %[[1]];
Z[x_, y_] := (Z1[x, y] + Z2[x, y])/2;
Plot3D[Z1[x, y], {x, 1, a}, {y, 1, b}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> "Integrate x->y",
  ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.}, BoxRatios -> Automatic]
Plot3D[Z2[x, y], {x, 1, a}, {y, 1, b}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> Automatic, PlotLabel -> "Integrate y->x",
  ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.}, BoxRatios -> Automatic]
Plot3D[Z[x, y], {x, 1, a}, {y, 1, b}, PlotRange -> All,
  AxesLabel -> Automatic, ColorFunction -> "TemperatureMap",
  PlotLabel -> "Experiment", ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.},
  BoxRatios -> Automatic]
```