

参赛队员姓名：郑迪允，朱基申

中学：上海平和双语学校

省份：上海

国家：中国南赛区

指导老师姓名：韩超群

指导教师单位：上海平和双语学校

论文题目：探究粘稠液体坠落中的形变与卷积现象

2021 S.-T. Yau High School Science Award

探究粘稠液体坠落中的形变与卷积现象

郑迪允，朱基申

摘要

当粘稠的液体在坠落到底部液体表面时，其无法迅速融入液面。此时液体细流会留存在液面上方，并对随后下落的液体施加侧方向的作用力，造成液柱向单个方向偏转。当偏转幅度达到一定值时，液柱底部受到上方抵抗拉伸的黏性力水平分量上的作用，并令其向液柱竖直状态运动。在液体下落速度高时，初触底部的液柱会迅速弯折，其下落过程中积聚的重力势能会在水平方向释放。当液柱水平位置接近偏转幅度最大值时，会增加前后方向的速度。如液柱坠落时状态竖直，则会因为从侧向运动的惯性向另一方向散开。此时落到表面的液体将自发地跟随圆形轨迹运动，这种效应则被称为卷绳效应。

本文分析了卷绳效应发生的原因以及触发条件，以及高度、粘度因素对其盘卷频率的影响。通过实验，我们得出盘卷频率随着粘度升高而降低的结论。然而高度对频率的变化趋势影响较为复杂，需要细分高度域分别展开讨论。

关键词：卷绳效应；盘卷频率；动态平衡；高粘度；应力形变

目录

引言	2
一、理论分析	3
1.1 分析方法	3
1.2 参量设置	3
1.2.1 矢量	3
1.2.2 位置与速率	4
1.3 形变模式	4
1.3.1 拉伸率	4
1.3.2 弯曲率	4
1.4 受力分析	5
1.5 动量分析	6
二、实验	6
2.1 高度实验	8
2.1.1 实验目的:	8
2.1.2 实验数据:	9
2.1.3 实验方法	9
2.1.4 高度-频率趋势图	10
2.2 粘度实验	18
2.2.1 实验目的:	18
2.2.2 实验数据:	18
2.2.3 实验说明:	18
2.2.4 实验分析:	19
2.3 误差分析	20
三、结论	21
参考文献	22
非出版资料	22
致谢	23

引言

蜂蜜是日常生活中最为常见的黏性流体。当蜂蜜从勺子中沿一条细长的液绳落下时，其并不会如水一般铺散在表面，而是跟随一条圆形路径缠绕并堆积起来。如果粘度系数高的液体从高处下落，液柱会自发形成一个不断堆积的圆柱体并达到自发的动态平衡，如同一段下落的长绳一般。这种现象因此得名卷绳效应。

在液体下落过程中，圆柱体下端融入液面的速度（即高度衰减速度）会与圆柱体上端液体堆积增长速度达到平衡状态。所以对于同样的下落高度，卷曲圆柱体的高度保持恒定。

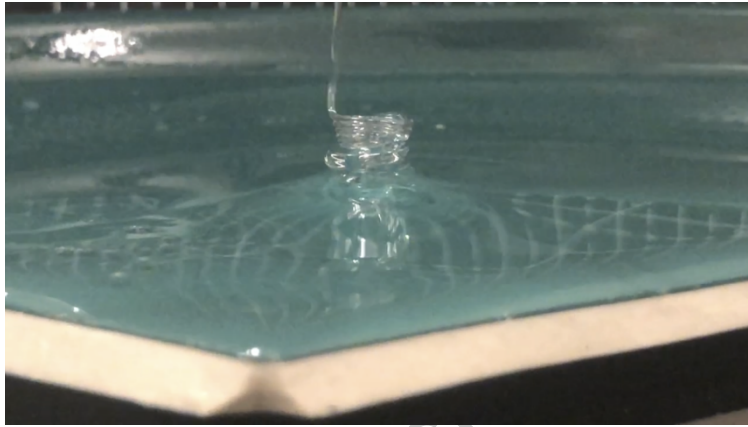


图 1. 硅油（动力粘度 100000cSt）



图 2. 卷绳效应示意图

当下落的液柱呈现片状下落形态时，圆周运动将不会出现，取而代之的是来回的堆叠图样。

二十世纪五十年代，美国科学家理查德-伍德科特和乔治-巴恩斯注意到这种现象并为之命名。两人围绕这一现象进行实验，并得出盘卷的频率随高度线性增长的结论。二十一世纪初，尼尔·M·里布(Neil M. Ribe)，迈赫迪·哈比比(Mehdi Habibi)，丹尼尔·波恩(Daniel Bonn) 就下落流体因高度不同受到三种力不同大小的不同平衡状态而定性划分出四

种运动模式，带来了盘卷频率与高度之间关系更准确的解释。

本文将提供理论分析来解释盘卷的运动学特征，并就影响圆柱体缠绕频率的因素展开讨论，集中于不同高度区域下缠绕频率变化趋势的区别。由于该现象对于实验仪器精度要求并不苛刻，且液体的自发盘卷在给定高度下能够很快达到动态平衡，我们进行了多次重复性高的较精确实验，并以视频方式记录再用分析软件得出结论。

一、理论分析

1.1 分析方法

我们将采用构建空间坐标系的方式描述卷绳效应中某一节液柱的运动和形变方式。运用动量守恒、质量守恒等分析工具，推算出旋转的圆柱体达到动态平衡时作用在横截面积上的正压力和剪应力。

1.2 参量设置

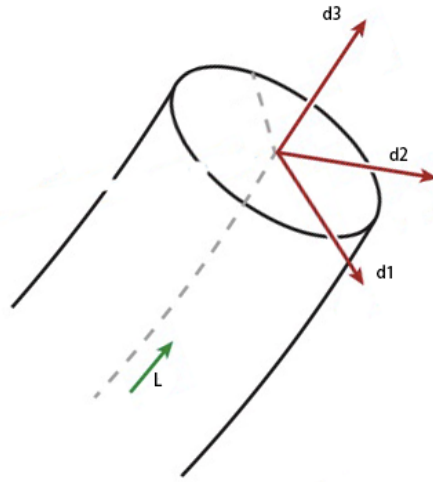


图 3. 参量设置

1.2.1 矢量

对于盘卷运动的液体，我们选取其中一截长度，将其中心轴长定义为 l 。

在截取的横截面积上选取中心轴上一点，以其为原点建立三个单位正交矢量。其中矢量 \vec{d}_3 为沿着 l 方向的向量。再将从中心点向横截面积边缘延伸的单位向量定义为 \vec{d}_1 。此时三个向量的关系为：

$$\vec{d}_2 \equiv \vec{d}_3 \times \vec{d}_1$$

1.2.2 位置与速率

设选取的中心点位置为 \vec{x} ，其同时受到弧长 l 与时间 t 的影响。故可以将位置表示为： $\vec{x}(l, t)$ 。¹此时该轴上的点速率为 $\frac{d\vec{x}}{dt}$ ，可表示为 $\vec{v}(l, t)$

1.3 形变模式

液柱在下落的过程中受力而落入主要的三种形变中：旋转，拉伸和弯曲。其中旋转是液柱中不在中心轴上的点围绕中心轴顺/逆时针运动，拉伸指的是液体尾部坠落时横截面积不断变小而长度变大，而弯曲则是液体接近底部时其尾部末端受到向上的反作用力而形变。

对于第一种形变模式，其力矩作用的方向与大小和中心轴上的点的速率并无联系，因而难以展开平动或转动分析。对于后两种形变，我们分别将单位向量设为旋转中轴，可以通过运动学方程表示出其转动的周期。

1.3.1 拉伸率²

在液体下降的过程中，其所受重力会与黏性力相抵抗，并让液柱更加细长，横截面积不断变小。液柱沿着中心轴方向不断进行拉伸时，我们定义其经过拉伸后的总量与原长的比值随时间而变化的频率为拉伸率。设拉伸后长度为 s ，则短时间内拉伸比值为 $\frac{\partial s}{\partial t}$ 。拉伸率的表

达式为： $\frac{\partial(\frac{\partial s}{\partial t})}{\partial t}$

对其进行分析，可得到拉伸率等于质点沿中心轴方向的运动速度与原长的比值。为了简洁表达出拉伸率，我们定义沿着中心轴(即沿着 \vec{d}_3 方向)的速度大小为 $\vec{v} \cdot \vec{d}_3$ ，再将 $\frac{\partial}{\partial t}$ 定义为 $'$ ，则原式可简化为： $\vec{v}' \cdot \vec{d}_3$ ，将该拉伸率定义为 R ，得 $R = \vec{v}' \cdot \vec{d}_3$

1.3.2 弯曲率³

与推导拉伸速率的思想相同，沿着弯曲方向伸长的总量与原长的比值变化的速率可以被表示为绕着单位向量朝向的轴旋转的频率。设向 \vec{d}_2 方向弯曲速率为 R_2 ，则

¹ 该表示方法源于 *Liquid Rope Coiling* , Neil M. Ribe, Mehdi Habibi and Daniel Bonn

² 拉伸率的定义源于 *Liquid Rope Coiling* , Neil M. Ribe, Mehdi Habibi and Daniel Bonn

³ 弯曲率的分析方式源于 *Liquid Rope Coiling* , Neil M. Ribe, Mehdi Habibi and Daniel Bonn

$$R_2 = -\vec{v}' \cdot \vec{d}_1$$

此时单位向量 \vec{d}_1 的含义为弯曲角速度的方向。

同理，向 \vec{d}_1 方向弯曲速率为 $R_1 = \vec{v}' \cdot \vec{d}_2$

值得注意的是，用右手螺旋定则判断时，朝向 \vec{d}_2 方向的旋转方向为 \vec{d}_1 的反方向（见上图）。由于绕轴旋转的频率并非矢量，所以表达式前方需添加负号以显示朝向。

1.4 受力分析

在展开横截面的受力分析之前，需要引入应力张量来表示收到的合力。

设对于横截面上一点 0，其应力张量为：

$$\vec{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

其中对于 σ_{ij} ，i 代表其所处平面，j 表示其受力方向。

由应力张量的性质： $\sigma dA \equiv dF$

对质点进行积分，得到横截面积中受到竖直方向力的总和为：

$$\vec{F} = \int \vec{\sigma} \cdot \vec{d}_3 dA$$

除了积分表达式以外，还可以运用质量守恒对于拉伸率进行变化来表示横截面上竖直方向力的总和。⁴

流动均匀的液体在给定横截面积和长度中质量不变，可推得拉伸变化之比在数值上等于横截面积变化之比。当一段流体长度增加 n 倍时，其横截面积缩小 n 倍。则在给定的时间内，横截面积的变化率等于长度的变化率（即拉伸率）。

设横截面积变化率为 $\frac{dA}{dt}$ 。有：

$$\frac{dA}{dt} = -AR。$$

由于 R 仅代表变化率，其单位为 s^{-1} ，故需乘以原面积保持量纲平衡。

将流体的剪切粘度设为 η 。将其视为牛顿流体，有

$$\eta = \frac{\tau}{\gamma}$$

⁴ 关于质量守恒和随后黏度分析方法来源于《高分子流变学》拉伸流动和拉伸黏度

<https://www.docin.com/p-2379358548.html>

其中 τ 代表剪应力，而 γ 为剪应变率。

对于拉伸应力 σ ，其表达式为：

$$\sigma = 3\eta\dot{\epsilon}^5$$

式子中 $\dot{\epsilon}$ 用来表示拉伸应变速率，此处其与 R 等价。在式子中，垂直方向的拉伸张量为 $\vec{\sigma} \cdot \vec{d}_3$

此时对于横截面积垂直方向受力的表达可写为：

$$\vec{F} = 3\eta AR^6$$

1.5 动量分析

1.5.1 平动动量守恒

由动量守恒定律得，一段液柱内动量总变化 ΔP 关系式为：

$$m \Delta \vec{v} = \vec{F} \Delta t + m\vec{g} \Delta t$$

将变量分解为微元，得

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}$$

单独对一块横截面积展开讨论， m 可表示为 ρA

代入上式，得：

$$\rho A \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho A\vec{g} + \vec{F}'$$

其中 \vec{F}' 在替换过程中对弧长求了偏导。这是因为质量替换时将物体当作二维平面，而 \vec{F} 的计算来源于三维应力张量。故为使维度与量纲平衡，将其对绳长求偏导降维。

二、实验

我们采用的模拟卷绳效应的方式是将实验用液倒入针筒中，在铁架台上通过调整高度来

⁵ 拉伸粘度在数值上等于剪切粘度的三倍

⁶ 该表达式与 *Liquid Rope Coiling* , Neil M. Ribe, Mehdi Habibi and Daniel Bonn 中结论之一重合

实现高度区域的变量控制。在保证平均的流速方面，我们使用了合计 1kg 的砝码来当作重物保证施力的一致。因此，对于不变的针管口直径，流速是恒定的。以硅油为例，在不变的压力下硅油在管口直径为 3mm 时流速约为 0.03008 毫升每秒，直径为 1.5mm 时则是 0.00529 毫升每秒。此后的实验中我们测出了不同液体填充时对应的不同流速。

实验器材：500g 砝码一个、200g 砝码两个、100g 砝码一个，60mL 针筒 5 个，铁架台，三脚架，100000cst 硅油 1kg，0 度蜂蜜 500mL，洗发水 100mL，碟子若干，摄影用 iPhone8（60fps 拍摄），剪切板，量尺。

装置搭建



图 4. 装置搭建

图示的铁架台是为了保证针筒在液体下落时保持稳定。计算高度时，我们将针筒夹在铁夹中，测量出针口最低端在铁架台上对应的高度，再标记以准确求得其与液面的高度差。

实验前分析：经过对前人实验数据和科研的解读，我们设计实验时预估出 4 个对应不同高度的底部盘卷运动模式：粘性模式，重力模式，钟摆模式和惯性模式。⁷运动模式的界定取决于在给定模式下占据主导地位的力的种类。在下落的液体中存在影响最大的三种力分别是粘性力，重力和惯性力。其中粘性力是液体内部抵抗形变（如拉伸与卷曲）的力，重力特

⁷ 对下落模式的分类归纳来源于：The Liquid Rope Trick. Neil M. Ribe, Mehdi Habibi, and Daniel Bonn.

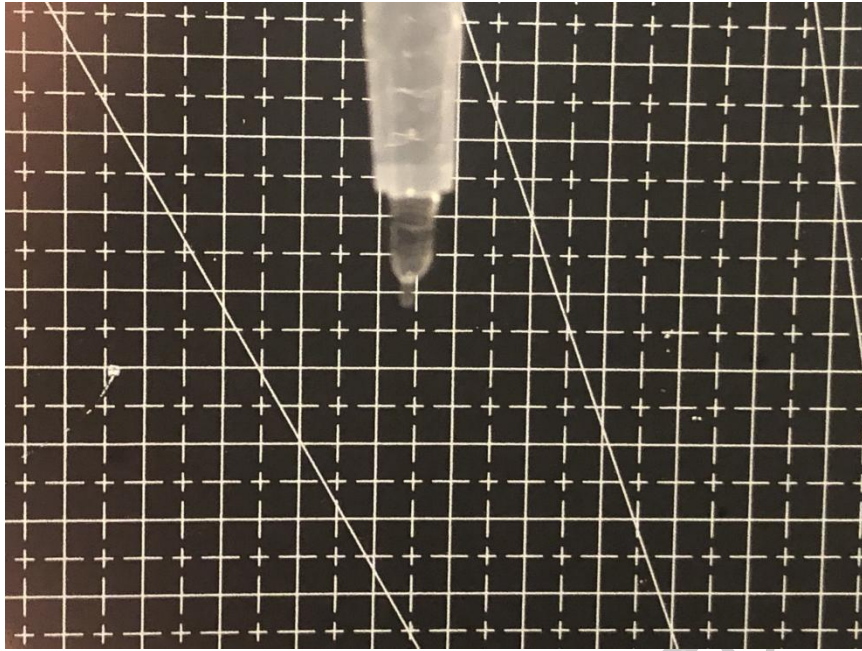


图 5. 液柱下落

指下落时悬挂在空中的液体受到的力，惯性力则是液体底部与盘卷部分接触时被带动进行圆周运动的力以及导致液体竖直方向速度改变的力的总和。

粘性模式对应的是粘性力占据主导地位时卷绳效应的运动模式，而重力模式中悬挂液体的重力为三个力中最大的力。钟摆模式与惯性模式中惯性力都是主要角色，不同之处在于钟摆模式下由于尾部质量小，易受底部盘卷惯性力的影响而进行钟摆般的周期运动。惯性模式中的惯性力平衡的是底部盘卷中抵抗弯曲的粘性力。其不足以为悬挂的尾部整体提供足够支持回荡的横向作用力，故液柱整体朝向竖直向下。

在对卷绳效应受力分析时，我们并没有将表面张力纳入考虑。如上图所示，即使在针筒顶部并不施加竖直方向压力时，液体仍受重力影响流出直径为 1.5mm 的针孔。这种黏性液体的表面张力过小以至于并不足以支撑起自身的重力，因此我们认为液体的表面张力可以忽略不计。

2.1 高度实验

2.1.1 实验目的

探究高度因素对于卷绳效应生效时底部盘卷频率的影响，以及不同高度区域下盘卷频率不同的改变趋势

2.1.2 实验数据

组别	1	2	3	4	5	6	7	8
高度(cm)	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50
频率(Hz)	0.091	0.173	0.221	0.259	0.404	0.422	0.639	0.782

组别	9	10	11	12	13	14	15	16
高度(cm)	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00	8.25	8.50	8.75
频率(Hz)	1.052	1.188	1.246	1.361	1.449	1.605	1.628	1.655

组别	17	18	19	20	21	22	23	24
高度(cm)	9.00	9.25	9.50	9.75	10.00	10.25	10.50	10.75
频率(Hz)	1.703	1.727	1.796	1.846	1.862	1.801	1.818	1.789

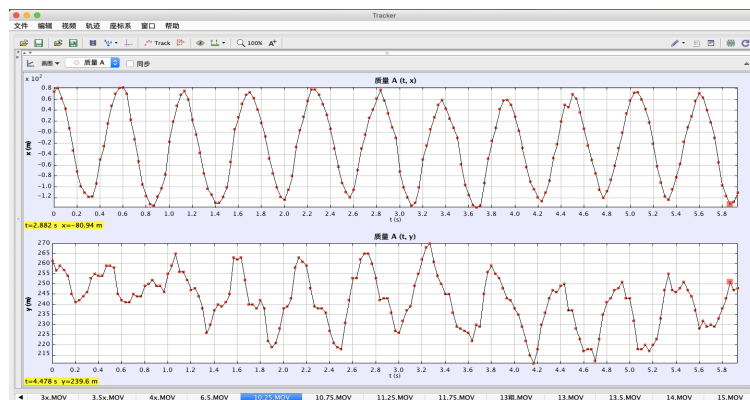
组别	25	26	27	28	29	30	31	32
高度(cm)	11.00	11.25	11.50	11.75	12.00	12.50	13.00	13.50
频率(Hz)	1.782	1.759	1.764	1.793	1.765	1.757	1.765	1.709
组别	33	34	35	36	37	38	39	
高度(cm)	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	
频率(Hz)	1.677	2.158	3.249	5.334	5.631	5.988	7.220	

2.1.3 实验方法

我们将下落的硅油中悬挂的液柱称为尾部。在底部液体盘卷运动的作用下，尾部会跟随其作匀速圆周运动。因此，摄像机在水平位置能够拍摄到液体尾部如同单摆一般来回运动，其位置与时间的关系可近似为正弦函数。

将拍摄出的视频导入 tracker 软件进行逐帧分析，得出的 $X(t)$ 函数具有恒定的周期。把图像中相邻的两个峰值所对应的时间量相减，再去除个别异常值，取对应高度周期的平均值，即可推得进行一次盘卷的频率。

当下落高度大于 13cm 时，我们为求得更加准确的实验数据换用了针筒，直径从 1.5mm 扩大到 3mm。因为下落的液体尾部直径与长度之比过小，尾部易受到扰动同时转而打乱下方盘卷部分旋转的频率。此时尾部下落过程中将经过几次折叠（如下图）。在该高度下展开的实验不具有可复制性。因此我们扩大口径，保持了盘卷频率的稳定。



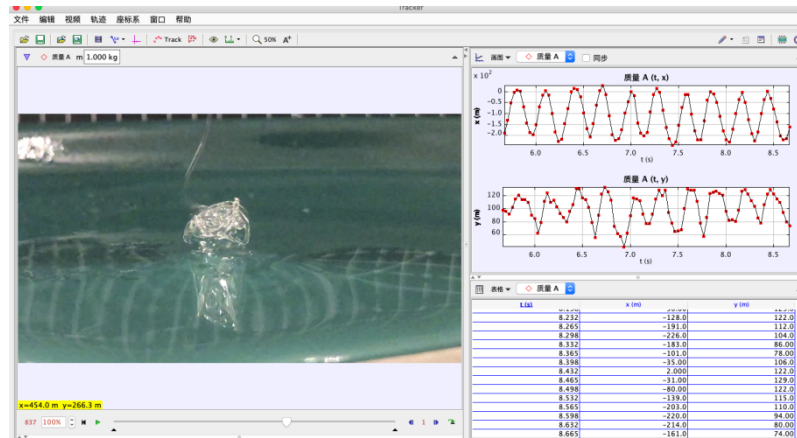


图 6、7. 实验数据

值得注意的是，尾部下落点的高度并不是恒定的。这是因为实际情况下液体盘卷过程中受力不均匀而导致下方圆柱体会向某一方向倾斜。由于它并不会影响旋转的周期，我们并没有就倾斜角度展开研究。

2.1.4 高度-频率趋势图

由图可得知，盘卷频率与下落高度之间的关系复杂。我们以高度为分界线，划分出卷绳效应发生时高度所对应的三个下落模式：重力模式，钟摆模式和惯性模式。

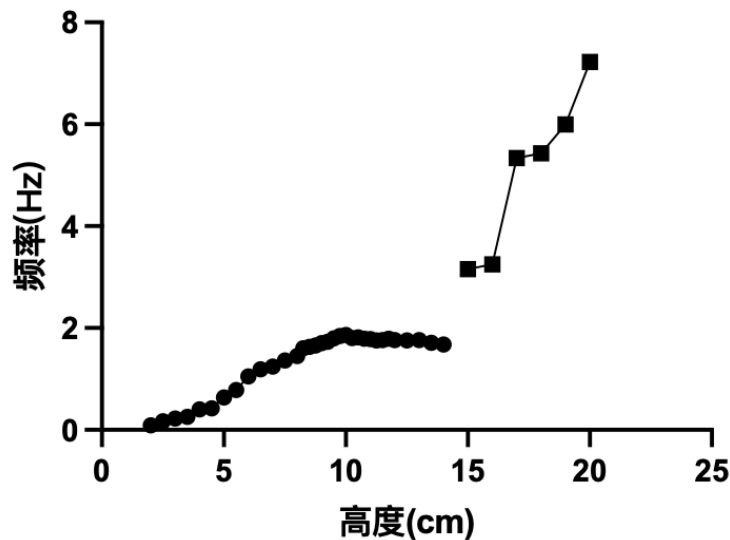


图 8. 高度-频率变化趋势图

值得注意的是，观察发现在高度小于 1cm 时，尾部的质量不足以提供其足够的重力或是惯性力。在此情况下，粘性力占据三个力中的主导地位，抵抗运动趋势的粘性力阻止了底部液柱的弯折，从而遏制盘卷效应。流出的液体如同水柱般匀速下落，卷绳效应在这一高度领域下几乎不会显现。

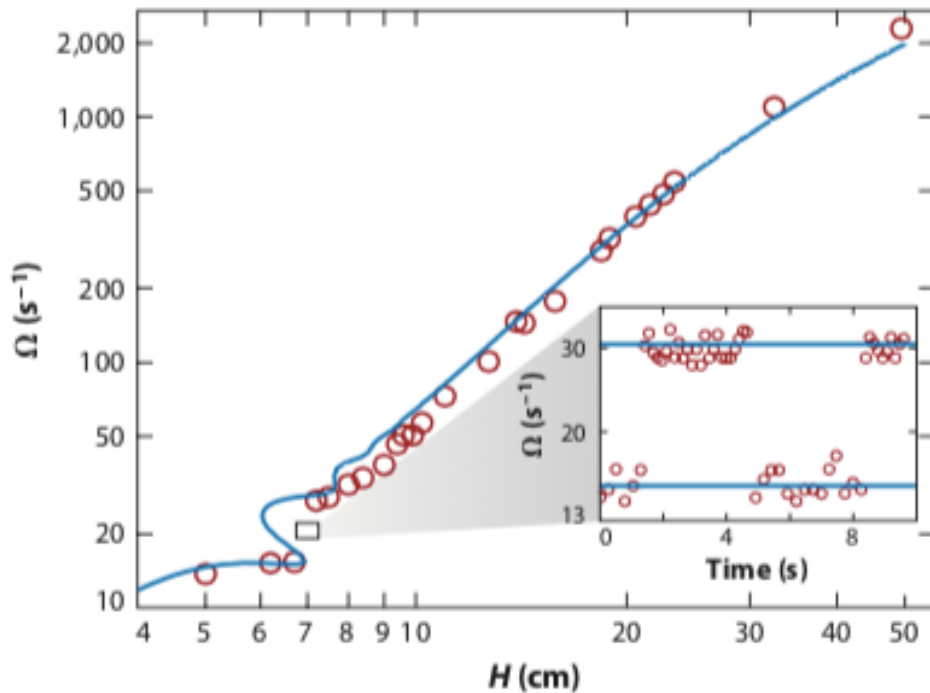


图 9. 频率变化图

上图选自 2011 年发表的 *Liquid Rope Coiling*，其通过反复试验获取数据并绘制出了精确的高度-频率变化图，并以此为依据细化了卷绳运动模式的分化。

该论文中进行实验时选用的液体粘度为 40000cSt，故相同高度对应的卷曲频率与我们得出的数据不一致。即便如此，此趋势图仍清晰反映了图像中运动模式之间的衔接与断层，并且得出的趋势结论具有借鉴性。所以我们对于实验数据的分析与处理将是有效的。

2.1.4-1 重力模式

依据趋势图中稳步增长的区间，我们将 4cm—8cm 的下落高度定义为重力模式，并将增长趋势近似为线性。由此得模式下趋势图（如下图所述）

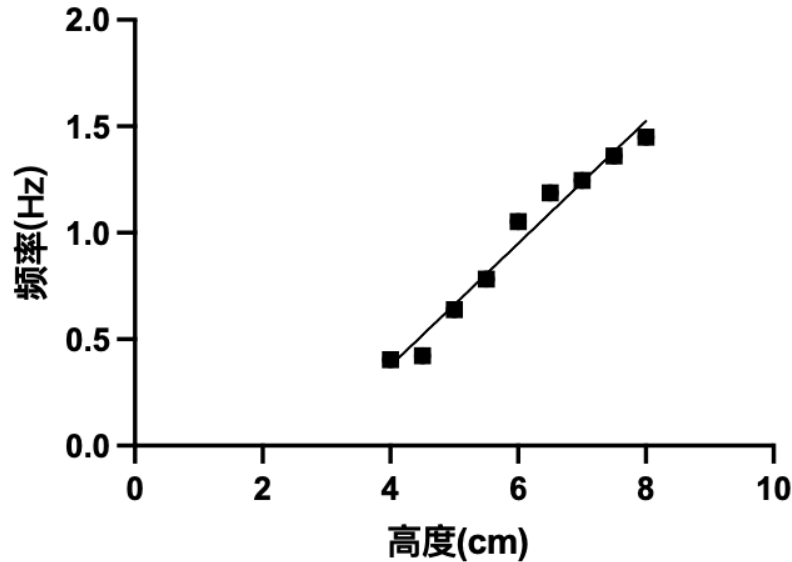


图 10. 实验数据图像

由于较低的高度，旋转带来的惯性力影响较小，重力的作用在三个力中最强。在匀速下落的液体中，重力与尾部抵抗拉伸的黏性力以及底部抵抗盘卷弯曲的粘性力平衡。由于惯性力不足以对尾部产生足够大的影响，下落过程中液体尾部的上端趋于笔直，而下端会因为朝某一方向的盘卷而产生小幅度偏移，实验效果如下图所示。



图 11. 实验效果图

这一模式中，各个力的大小稳定性高，能够较易形成动态平衡并在给定高度下保持不变

的盘卷频率。故频率随高度的上升趋势单一。

对于参量进行量纲分析，可得：

$$\Omega \sim \left(\frac{gQ^3}{va^8} \right)^{1/4}$$

$$a \sim \left(\frac{vQ}{gH^2} \right)^{1/2}$$

其中 Ω 代表盘卷频率， v 为运动粘度。 Q 是液体的流速， H 为液体下落高度， g 代表重力加速度， a 为盘卷液体尾部底部的半径。

给定除 H 以外其他参量不变，将两式联立，可得：

$$\Omega \sim H^2 \cdot \left(\frac{g^5}{Qv^5} \right)^{1/4}$$

则 $\Omega \propto H^2$

对后项代入进行数值上的估算，可得其数量级约为 10^{-5} 。

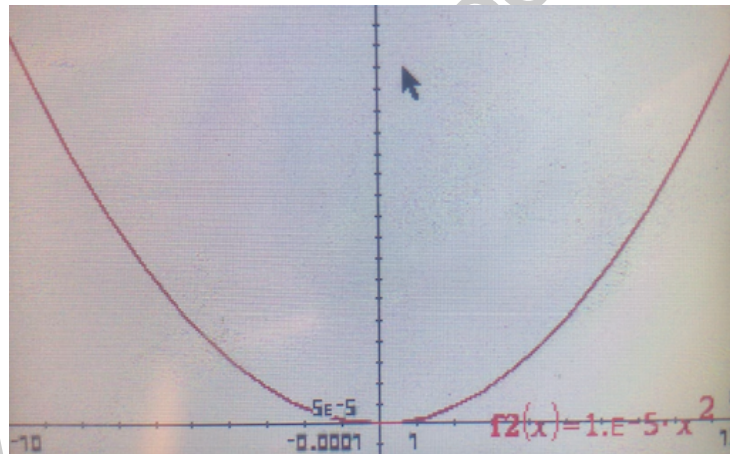


图 12. 数据函数图像

由函数绘图得，在二次方项前系数远小于 1 时， x 在 4-8 区间上升趋势可近似为线性。需要注意的是，由公式计算得到的 Ω 数值上与实验结果并不匹配。由于公式来源于量纲解析，并且原论文实验参量（如针孔口径，流速等）与我们不尽相同，推导出的公式局限性高。即便如此，在单个模式中 Ω 与 H 的变化关系和变化趋势有鲜明体现。因此该公式具有借鉴意义。

⁸ 公式来源：Bending-Filament Model for the Buckling and Coiling Instability of Viscous Fluid Rope Shin-ichiro Nagahiro, Sendai National College of Technology

⁹ 公式来源：Liquid Rope Coiling, Neil M. Ribe, Mehdi Habibi and Daniel Bonn

2.1.4-2 钟摆模式

我们将钟摆模式的作用区间大致定义为下落高度为 8cm—14cm。在这一运动模式中，重力与粘性力同时发挥作用。不同于上述惯性力较小的重力模式，钟摆模式中惯性力与重力在不同的大小关系下并不展现出单一的上升或下降趋势。

由于尾部重力大，其可以被视为质量分布均匀的单摆。将尾部与盘卷部分分开讨论，因为先前盘卷频率的上升，该单摆在盘卷作用的带动下被惯性力激发了内在的自然摆动频率。对于经典的单摆问题，其频率 Ω 正比于 $\sqrt{\frac{g}{l}}$ 。因为此时液体下落时旋转的圆柱体高度 $h \ll H$ ，又 $H \sim l$ ，则 $\Omega \propto \sqrt{\frac{g}{H}}$ 。因此，尾部在自身周期运动的惯性和底部盘卷的双重作用下运动。这能够解释其趋势的复杂性：当两个频率并不匹配时，单摆如同被阻尼影响般，带来尾部与底部整体旋转频率的下降和多变性。而当尾部自然摆动频率与底部旋转频率契合时，将会产生共振现象，对盘卷半径造成影响。

现实案例中，共振现象出现的条件极为苛刻，自然摆动频率与盘卷频率也难以吻合。因此趋势图中并没有出现幅度较两边显著改变的数据点。但当两频率恰好呈现倍数关系时，单摆的运动幅度也将会增大，留下托盘中更大的圆形轨迹。

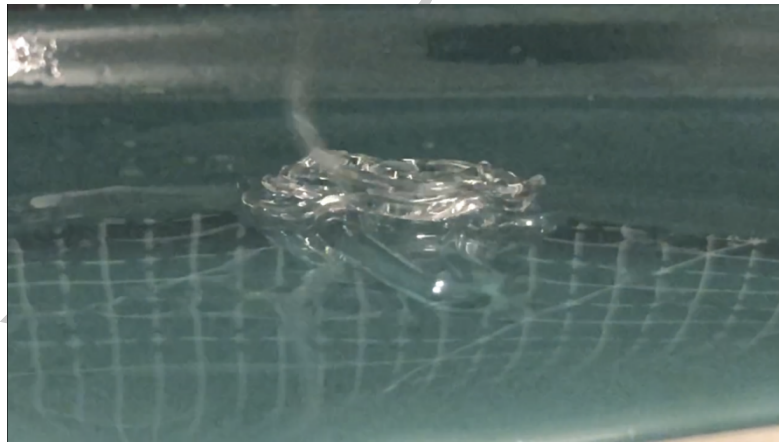


图 13. 液柱的圆形轨迹

如上图所示，某些频率中圆的半径显著增大，即为小幅度共振的结果。

$${}^{10}\Omega \sim (g/H)^{1/2}$$

上式关系源于对运动模式特质的预测以及实验数据。在尾部与底部频率趋于共振时，其振幅增大。不同于经典单摆运动，受到外力作用的尾部运动周期也会随之变大，留下更低的振动频率。

在共振存在时，单摆的振幅将会在持续力的叠加作用下不断增加，让底部的圆形轨迹半径无限制增长。然而这与观测情况相悖，实验中卷曲堆叠形成的圆形半径长基本稳定，而非预测般不断扩大。

经过对实验现象的观测，我们推测出在同一高度下，卷绳运动恒定轨迹的半径是平衡状态下的“最优解”。恢复力在位置接近振幅最大值时变得更大，其也随振幅整体的上升而上升。在惯性力的约束下，振幅无法继续延伸而保持在平衡状态中。

即使尾部的自然摆动周期由其拖尾长度决定，但在钟摆模式下高度 $H \gg R$ ，所以增加的振幅带来的摆长增加并没有被我们纳入考虑范围。

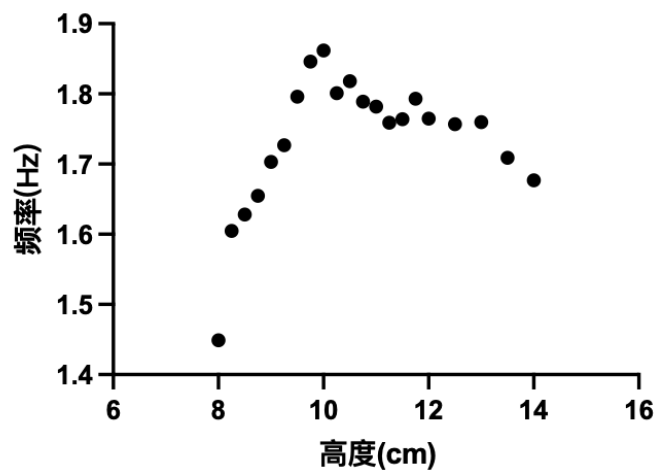


图 14. 高度与频率关系图像

¹⁰ 公式来源：Liquid Rope Coiling , Neil M. Ribe, Mehdi Habibi and Daniel Bonn

2.1.4-3 惯性模式

当下落的高度大于 15cm 时，悬挂的尾部将无法被简单视为单摆。由于质量分布的均匀性，只有尾部下端会受到盘卷运动的影响而偏移。尾部几乎完全垂直，因为底部的螺旋结构无法再给它施加足够大的侧向拉力¹¹。

在惯性模式中，惯性力完全平衡底部卷曲部分抗弯曲的粘性力。而尾部每一个单位长度的重力都与粘性力平衡。由趋势图得，卷曲频率随高度变化而变化的趋势大幅度上升。

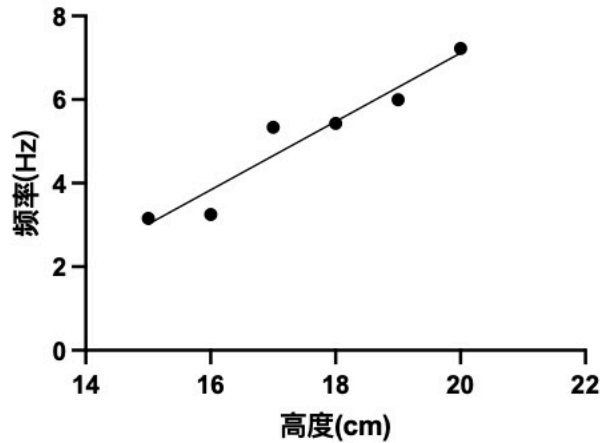


图 15. 高度与频率关系图像

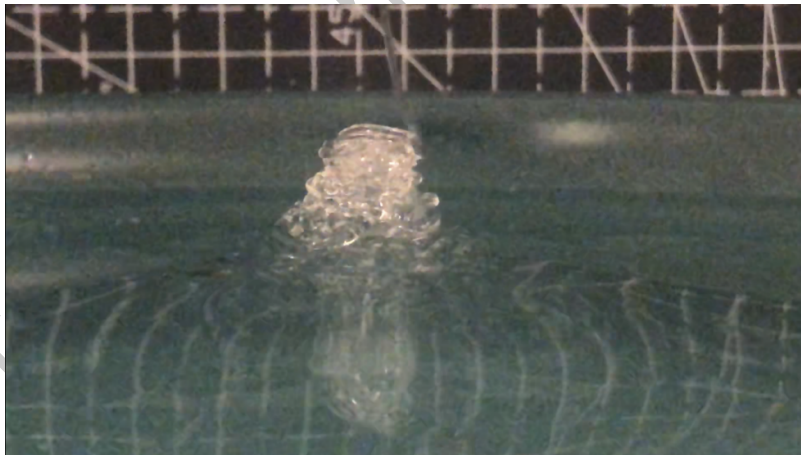


图 16. 底盘的液柱形态

如上图所示，卷积的频率过高，以至于先前落于液面上的液体来不及融入而迅速被覆盖。在其动态平衡点底部卷曲部分的高度 h 比先前的高度域中对应的圆柱体更高。

¹¹ 引用自 The Liquid rope trick, Neil M. Ribe, Mehdi Habibi and Daniel Bonn

同时对 Ω 与 a 进行量纲分析，可得：

$$\Omega \sim \left(\frac{Q^4}{va^{10}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad 12$$

$$a \sim \left(\frac{vQ}{gH^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 13$$

联立两式，得

$$\Omega \propto H^{\frac{10}{3}}$$

对参量不变部分估算，可得其数值位于 10^{-5} 量级。

同理，在高次方项系数前的系数远小于1时，变量的数量级与其差别过大，可在封闭区间内近似为线性变化。

显而易见地，惯性模式的变化趋势较先前重力模式的变化趋势更为险峻，这是由于惯性模式中旋转频率正比于 H 的更高次方项。

由下图所示，当 $H > 20\text{cm}$ 时，卷曲堆积将呈现高随机性分布。其不再跟随恒定的圆形轨迹，而是散落在各个方向，如同从高处落下的沙堆一般。在此情况下，卷绳效应的周期将不再具有可复制性。因此，我们并没有对更高的高度域展开研究。



图 17. 底盘的液柱形态

¹² 公式来源：Bending-Filament Model for the Buckling and Coiling Instability of Viscous Fluid Rope Shin-ichiro Nagahiro, Sendai National College of Technology

¹³ 公式来源：Liquid Rope Coiling, Neil M. Ribe, Mehdi Habibi and Daniel Bonn

2.2 粘度实验

2.2.1 实验目的

探究高度因素对于卷绳效应生效时底部盘卷频率的影响，并进行定性分析

2.2.2 实验数据

液体种类	高度 (cm)	盘卷频率 (Hz)
蜂蜜	3	2.632
	3.5	3.312
	4	3.088

液体种类	高度 (cm)	盘卷频率 (Hz)
洗发水	3	3.489
	3.5	3.645
	4	6.544

液体种类	高度 (cm)	盘卷频率 (Hz)
硅油	3	0.221
	3.5	0.259
	4	0.404

2.2.3 实验说明

由于仪器受限，我们并没能得出每一种液体的动力粘度，只有硅油具有固定的粘度值。为了方便横向比较，我们通过液体下降速度分出粘度高低之差：硅油>蜂蜜>洗发水

2.2.4 实验分析

通过对上述三种液体实验结果的观察，易得频率与液体粘度成正相关。在同一高度下，盘卷频率随着液体粘度的增加而增加。

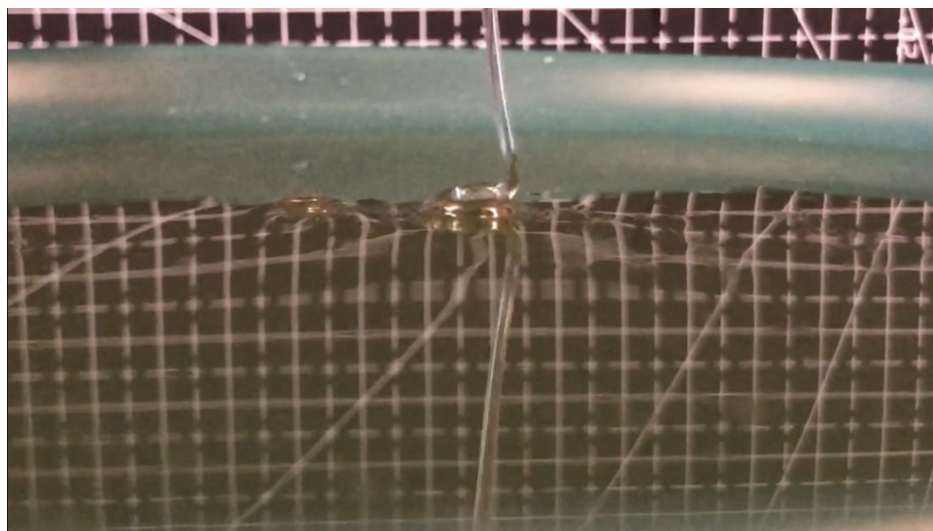


图 18. 蜂蜜下落时卷曲样式。

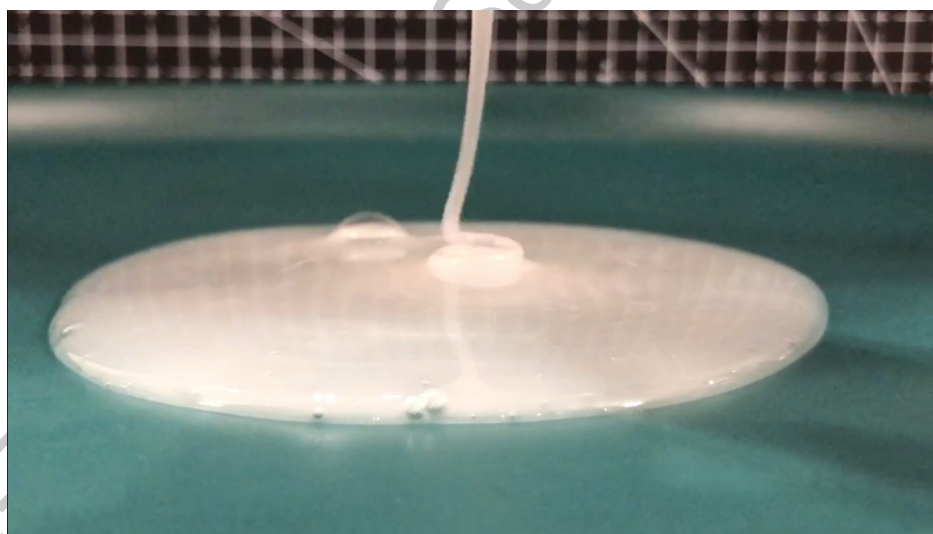


图 19. 洗发水下落时卷曲样式。

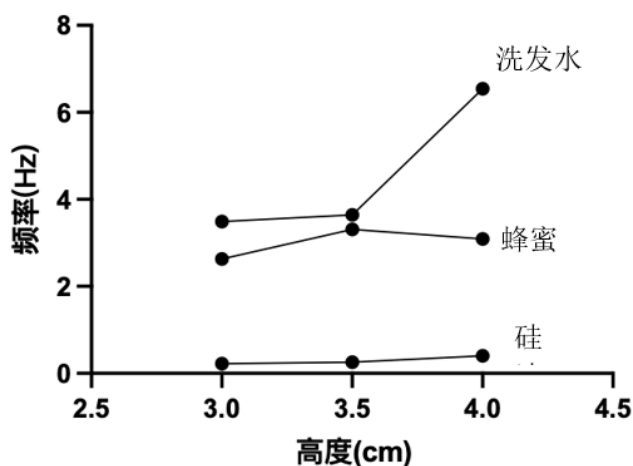


图 20. 三种液体的频率与高度关系图

2.3 误差分析

在家庭实验的过程中不论是实验场景的设定，还是数据处理的方式，精度与正规的实验室操作都相差甚远。误差的来源包括但并不仅限于：

(1) 高度测量

在高度测量中为了避免人眼观测带来的误差，我们先测出了针孔最下端对应铁架台上水平的相同高度，标记之后再对这段高度展开度量。这样繁复的操作带来了不可避免的误差累加。

(2) 数据处理

我们使用 tracker 对 60 帧拍摄的视频进行了逐帧分析，每个高度至少取 10 个周期再计算其平均值。然而高速摄像机的缺失使我们无法保证尾部到达振幅最大值时恰好被截取，致使数据分析方面出现了潜在的偏差。

(3) 装置搭建

在实验中我们使用的铁架台并非完全精确。除开可能的与水平方向间微量的倾斜角外，测量后对螺丝加固时铁杆会因为压力而向上或向下偏移，导致实际高度与测量高度间的差距。

(4) 背景设置

整个实验并没有集中在一天完成，视频的拍摄分散在了两周中。粘稠液体的黏度易受湿度、温度等环境因素影响，可能作为某组数据点较相邻组偏移的成因。

三、结论

本文针对流体卷绳定理进行了研究，描述并分析了液柱的运动和形变方式。基于此，设计高度实验和粘度实验研究了探究高度因素对于卷绳效应生效时底部盘卷频率的影响，以及不同高度区域下盘卷频率不同的改变趋势，最终得出实验结论：

1. 在高度低于 1cm 时，卷绳效应在该区域几乎不会显现；
2. 在 4cm~8cm 的下落高度范围内，各个力大小的稳定性而形成的动态平衡使液柱在高度不变的情况下保持盘卷频率的不变；
3. 在 8cm~14cm 的下落高度范围内，液柱尾部受到自身周期运动的惯性和底部盘卷的双重作用的影响。当两者频率匹配时，将产生共振现象，影响盘卷半径。当两者频率不匹配时，尾部与底部的旋转频率整体下降并具有多变性；
4. 当下落高度大于 15cm 时，尾部几乎完全垂直，卷曲频率随高度变化而变化的趋势大幅度上升。
5. 同一高度下，盘卷频率随着液体粘度的增加而增加。

参考文献

1. Bending-Filament Model for the Buckling and Coiling Instability of Viscous Fluid Rope

Article in Physical Review E • September 2008 DOI:

10.1103/PhysRevE.78.025302 • Source: PubMed

2. Liquid Rope Coiling Neil M. Ribe, Mehdi Habibi, and Daniel Bonn. Annu. Rev. Fluid Mech. 2012. 44:249 - 66

3. Liquid Rope-Coil Effect. George Barnes and Richard Woodcock in American Journal of Physics, Vol. 26, No. 4, pages 205-209; April 1958

4. Validity test of a Stokes flow solver by fluid rope coiling: Toward plate-mantle simulation

Mikito Furuichi, Masanori Kameyama, Akira Kageyama

5. The Liquid Rope Trick. Neil M. Ribe, Mehdi Habibi, and Daniel Bonn.

非出版资料:

1. 弹塑性力学-应变张量和应力张量 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/365718231>

2. 《高分子流变学》拉伸流动和拉伸黏度 <https://www.docin.com/p-2379358548.html>

致谢

我们衷心感谢韩超群老师对关于流体卷绳效应相关理论的指导，对论文写作给出的建议，和对初步实验设计方面提供的帮助。

我们两位在实验过程中团结协作，通过不断的配合建立默契，努力将每一个环节都做到细致入微，最终共同完成了论文的研究工作。郑迪允同学和朱基申同学共同完成了理论建模。郑迪允同学筛选实验材料并对实验数据进行采集和分析，朱基申同学负责理论分析和实验验证。最后我们一同将论文汇总成稿，修改一些细节上的错误。

衷心感谢所有老师，同学给本篇提供的协助。