
第一页为封面页

参赛队员姓名：苗庭嘉、郑梓歆、刘澍泽

中学：中国人民大学附属中学

省份：北京市

国家/地区：中国大陆

指导教师姓名：陈曦

指导教师单位：中国人民大学附属中学

论文题目：《北京鬃人的动力学模式分析》

《北京鬃人的动力学模式分析》

作者：苗庭嘉，郑梓歆，刘澍泽

（中国人民大学附属中学，北京）

指导教师：陈曦

（中国人民大学附属中学，北京）



目录

目录.....	3
摘要.....	4
1. 绪论.....	5
1.1 鬃人简介.....	5
1.2 鬃人运动模式概述.....	5
1.3 本文的主要研究内容.....	6
2. 模型建立与理论分析.....	7
2.1 模型建立.....	7
2.1.1 铜盘与鬃人.....	7
2.1.2 鬃毛与尖端.....	7
2.2 尖端的动力学分析.....	9
2.3 鬃毛尖端的运动与受力.....	10
2.4 鬃人的转动模式.....	12
2.5 鬃人转动的影响因素.....	15
3. 实验与数据分析.....	16
3.1 实验概述.....	16
3.1.1 实验装置及原理.....	16
3.1.2 实验步骤.....	18
3.2 鬃人相关参数对其运动影响.....	18
3.2.1 鬃毛的长度.....	18
3.2.2 鬃毛的倾角.....	18
3.2.2 鬃人的质量.....	19
3.3 振动表面相关参数对鬃人运动的影响.....	21
3.3.1 振动表面的振幅.....	21
3.3.2 振动表面的频率.....	22
3.4 误差分析.....	23
4. 总结与展望.....	24
4.1 总结.....	24
4.2 展望.....	24
参考文献.....	26
致谢.....	27

摘要

鬃人，一种民俗手工艺品，将其置于器皿中，敲击器皿边缘会使其运动。鬃人的运动由所在表面的振动诱导产生，通过调节敲击频率，可调节表面振动相关参量，进而实现对鬃人运动的控制。

本文依据鬃人的动力学特性对其进行了理论建模，针对鬃毛建立了弹性体—刚体连接模型，得到关于鬃毛尖端受力与鬃人转动模式的较为完备的理论解释，同时通过定量实验揭示了鬃毛相关参数与振动表面相关参数对鬃人运动的影响。

本文的研究结果对于优化鬃人及类似装置动力学性能具有一定的参考价值与借鉴意义。

关键词：弹性力学；应力；刚体；定轴转动

Abstract

Mane man, a kind of folk handicrafts, is placed in a vessel. Knocking on the edge of the vessel will make it move. The movement of mane man is induced by the vibration of the surface. By adjusting the knocking frequency, the relevant parameters of surface vibration can be adjusted, so that the movement of mane man can be controlled.

Based on the dynamic characteristics of mane man, this paper makes a theoretical modeling, establishes an elastomer rigid body connection model for mane, obtains a more complete theoretical explanation of the force on the tip of mane and the rotation mode of mane man, and reveals the influence of mane related parameters and vibrating surface related parameters on the movement of mane man through quantitative experiments.

The research results of this paper have certain reference value and significance for optimizing the dynamic performance of mane man and similar devices.

Key words: Elasticity; Stress; Rigid body; Fixed axis rotation

1. 绪论

1.1 鬃人简介

鬃人，将一圈硬质猪鬃毛固定于底部以进行支撑的泥质玩偶小人，是一种独具特色北京民俗手工艺品，在过去的北京城家喻户晓，折射出当时北京趣味盎然的市井生活。

鬃人具有深厚的历史文化底蕴，创始于清朝末期，受京剧及皮影戏影响，具有独特的艺术美感，集戏剧脸谱、服装绘制于一身。鬃人表演作品主要为经典戏曲片段，如关羽单刀赴会等，也有的作品以民间花会为题材，如跑旱船、舞狮等。

其观赏效果类似于木偶戏，但艺人的表演方式极为特殊：将其置于铜盘等较平整的铜盘内，敲击该铜盘的边缘，铜盘中的鬃人就会凭借鬃毛弹性旋转舞动起来，与舞台上进行戏剧表演的演员一般，故老北京人又称它为“盘中戏”



图 1 民俗手工艺品——鬃人

1.2 鬃人运动模式概述

通过观察鬃人底部，我们发现，鬃毛并非密集排列分布在整個底面的，而是在底部外围等距逆时针倾斜排列（并非倾斜向同一方向），如下图所示。

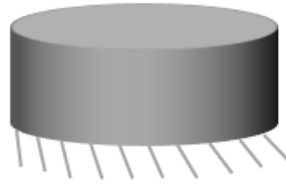


图 2 鬃人结构示意图

我们认为，敲击使铜盘产生振动，鬃人的运动受所在铜盘的振动诱导产生，其直接原因是刷毛与振动铜盘的相互作用。通过调节敲击频率，可以调节表面振动相关参量（如振幅与频率），进而实现对鬃人运动的调控。

进一步地，我们将单一鬃毛与振动表面之间的作用单元分为三个进程：

（1）表面上运动，鬃毛形变，产生正应力，表面对鬃毛产生法向作用力；作用力对鬃人产生冲量矩，鬃人获得相对其中轴的角动量。

（2）表面向下运动，鬃毛形变恢复，正应力减小，表面对鬃毛作用力减小，鬃毛发生错动；由于具有角动量，鬃人上部结构旋转。

由于鬃毛在鬃人底部呈现圆周对称，上述作用单元重复，宏观表现为鬃毛运动带动鬃人发生定轴转动，后文将基于弹性力学对相关机制进行具体阐释。



图 3 鬃毛与振动表面的相互作用机理

1.3 本文的主要研究内容

本文依据鬃人的动力学特性对其进行了理论建模。

本文基于弹性力学等理论对鬃人的运动进行了动力学分析，针对鬃毛建立了弹性体—刚体连接模型，得到关于鬃毛尖端受力与鬃人转动模式的较为完备的理论解释，同时，本文介绍了多组定量实验，分别揭示了鬃毛相关参数与振动表面相关参数对鬃人运动的影响。

本文的研究结果对于优化鬃人及类似装置动力学性能具有一定的参考价值与借鉴意义。

2. 模型建立与理论分析

2.1 模型建立

2.1.1 铜盘与鬃人

在鬃人演出中，表演人员通过敲击放置鬃人的铜盘使其振动，铜盘的振动进一步导致了鬃人的转动。

首先，我们建立振动面模型以表征鬃人所在的铜盘，由于复杂的振动不便分析，我们将铜盘抽象为做简谐振动的振动面。取鬃毛水平运动方向为 x 方向，竖直方向为 y 方向，则振动面的位置可以由 y 方向的时间函数描述：

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-1)$$

对其求一阶导数和二阶导数可以分别得到其速度与与速度：

$$\dot{y} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2-2)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-3)$$

其次，我们建立鬃人模型，并作出如下假设

(1) 鬃人上部具体构型不影响其运动模式，认为其等效于质量均匀的圆柱形物块。

(2) 鬃人底部为圆形，鬃毛等距分布于鬃人底部的圆周上，各鬃毛均沿切向向顺时针方向倾斜，其与竖直方向成相同角度 θ 。

(3) 鬃毛质量极小，可以忽略，认为其为轻质。

鬃人底部的鬃毛与振动表面的相互作用是鬃人发生转动直接原因，因此，鬃毛是我们进行研究的重点。

2.1.2 鬃毛与尖端

显然，将鬃毛视为刚体是不合实际的，因此，在最初的模型设想中，我们希望将单根鬃毛抽象为细长弹性杆，运用弹性力学的原理构建模型并进行理论分析。但当我们对鬃毛两端施加外力使其弯曲，再撤去外力后，鬃毛难以恢复原来的状态，这说明，鬃毛的弹性存在一定限度，在一定量级的外力作用下，

鬃毛不具有较为理想的弹性，更无法近似视为理想弹性体，因此，我们认为弹性力学理论并不能被全面应用于理论分析中。



图4 鬃毛的形变

在预实验中，我们发现，只有鬃毛的尖端呈现明显的振动（以下简称尖端现象），而鬃毛的主体则呈现出近乎刚性的运动特征，这是由于力在鬃毛中以波动的形式传播，而波受到粘性效应和横向惯性效应的影响，并不能传播很长的距离。这启发我们建立一个弹性体—刚体连接模型。

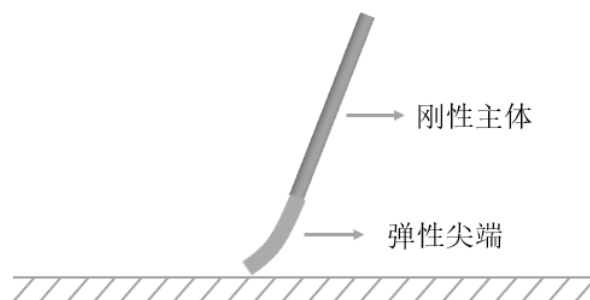


图5 刚体弹性体模型

我们认为，鬃毛主体部分的刚性确保了其倾角始终为 θ 。

特别地，我们定义鬃毛“尖端”（以下简称尖端）为鬃毛产生明显振动的部分。

需要指出，尖端现象出现的直接原因是鬃毛并非理想弹性体，波在鬃毛中存在耗散与弥散。尖端尺寸受鬃毛自身材料性质等多方面因素影响，其精确范围是难以界定与测量的，将鬃毛划分为尖端与主体仅仅是出于建模分析的需要，实际实验中尖端与主体之间也不存在明显边界。

我们将尖端视作弹性杆，基于弹性力学¹对其作出如下假定：

¹ [1] 薛强.《弹性力学》[M].北京:北京大学出版社,2006

(1) 连续性假定：假定尖端是连续的，即尖端的体积都被组成它的材料填满，其中不存在任何空隙。

(2) 弹性假定：假定尖端完全弹性，即假定尖端完全服从胡克定律 (Hooke's Law)，应力与应变间呈线性关系。

(3) 均匀性假定：假定鬃毛尖端由各部分材料性质相同。

(4) 各向同性假定：假定鬃毛尖端内一点的弹性性质在各个方向均相同。

(5) 小位移假定：假定位移和形变是微小的，即鬃毛尖端受力后其内部各点位移远远小于鬃毛原尺寸。

假设 (3) 与 (5) 的合理性基于如下比较：振动面的振幅 A 在 $1 \times 10^{-5} \text{m}$ 量级，而尖端长度 l 在 $1 \times 10^{-3} \text{m}$ 量级， $A \ll l$ ，鬃毛因振动面产生的位移与形变与鬃毛原尺寸相比是极其微小的，因此我们认为尖端形变可以不予考虑，且为线性弹性。

2.2 尖端的动力学分析

接下来，我们针对单一鬃毛进行理论分析。

我们先在弹性杆的理论下分析其中的波动。这样的波可以分为压缩波，剪切波两种形式，波速如下²：

$$c_{纵} = \sqrt{\frac{(1 - \sigma)E}{(1 + \sigma)(1 + 2\sigma)\rho}} \quad (2 - 4)$$

$$c_{切} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2 - 5)$$

式中， E 为杨氏模量， G 为剪切模量， ρ 为材料密度。

若杆为理想弹性体，则波在杆中无限传播。即将鬃毛从振动面上拿起，鬃毛的运动不会停止，整根鬃毛中会这显然是做不到的。杆的粘性效应和横向惯性效应使得波动方程中产生耗散项和弥散项，是波速减小，至波动消失。

基于参考文献，有如下波动方程³：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c_0^2 \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\eta}{\rho_0} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} + \frac{v^2}{c_0^2} \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial t^2} \right] + \frac{\eta}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial t}$$

² [2] 杨桂通.《弹性力学》[M].北京:高等教育出版社,2017.10

³ [3] 郭建刚.有限变形弹性杆中应力波的波动行为及其传播特性[D].太原: 太原理工大学, 2003.

$$+v^2R^2 \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial t} \right] \quad (2-6)$$

式中， X 为 Lagrange 坐标， U 为 Lagrange 坐标系中的位移矢量， ρ_0 为物体变形前的密度， C_0 为 Lagrange 描述的线性波速， η 为粘性系数， ν 为泊松比。

文献指出，含 η 项为粘性效应导致的耗散，对能量的损耗起主要作用；含 ν 项为横向惯性效应导致的弥散项，对能量的损耗起次要作用。

我们认为受到波影响的部分即为尖端，这一部分可视为弹性。刚性主体部分连接尖端，可实现鬃毛平面内的小幅转动，这样我们只需将分析重点放在尖端，刚性主体只是带动鬃毛随毛尖运动。

2.3 鬃毛尖端的运动与受力

由于鬃毛自身的重力，鬃毛主体对尖端存在如图所示的作用力，因此尖端必存在向负方向相对表面运动的趋势，摩擦力方向与之相反。

基于尖端为轻质杆的假定，认为表面对尖端的合作用力 $F_{\text{外}}$ 沿杆。

从力的作用效果分析，力 $F_{\text{外}}$ 平衡鬃毛主体对尖端产生的作用力，同时“响应”鬃毛内部产生的应力，力 $F_{\text{外}}$ 相对鬃毛中心转轴产生的冲量矩是鬃毛转动的根本原因。

从力的成因角度分析，力 $F_{\text{外}}$ 的产生的被动的，鬃毛主体对尖端存在的作用力间接导致了其产生，其大小受尖端内部应力的影响。

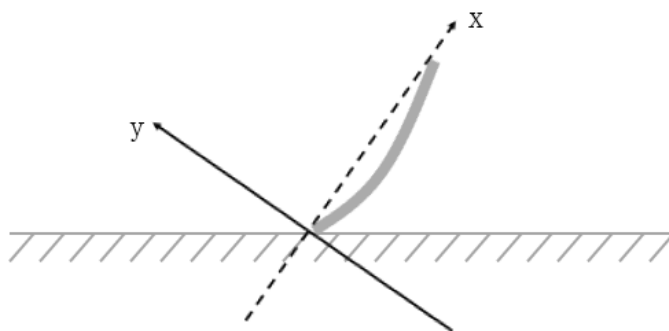
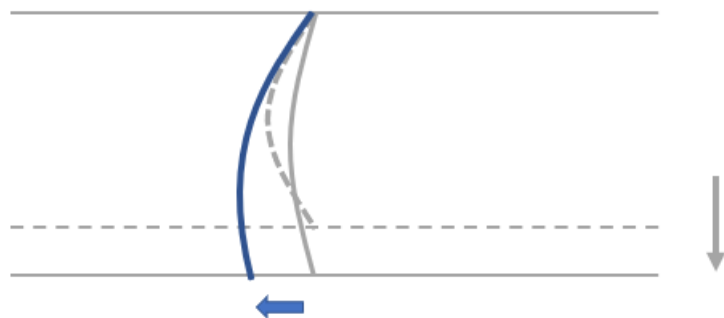


图 6 杆尖端受力模型

但是，当鬃毛旋转时，若尖端与表面间发生相对滑动，尖端与表面间的摩擦力将反向，这会使得摩擦力成为阻碍鬃毛转动的因素，若如此，鬃毛将永远无法开始转动，这与事实相悖。

因此，我们做出合理推测：尖端与表面间并不存在连续的滑动，尖端与表面间存在的始终为静摩擦力。宏观上鬃毛的位移是由尖端离散的、高频率的错动产生的。

其中，我们对错动的定义为：在极短时间内发生的，过程中不存在能量损耗的，鬃毛尖端发生的极小位移。



平面下降

图7 鬃毛的错动示意图

我们认为，导致错动产生的直接原因为表面高频率的振动，其作用机理如下：

(1) 振动表面上升，主动诱导尖端产生形变，尖端产生应力，表面“响应”尖端应力的产生，表面对尖端的作用力 $F_{外}$ 增大， $F_{外}$ 对鬃人主轴产生冲量矩，鬃人获得角动量。

(2) 振动表面下降，鬃毛舒张，内部应力逐渐减小直到消失，尖端在极短时间内恢复原有构型，尖端发生若干次近似于跳跃的极小位移，在每次跳跃过程中，鬃人与振动表面暂时分离，因其自身具有角动量而产生定轴转动。

需要指出，鬃毛的周期性错动并不意味着鬃人的旋转同样是类似周期性跳动的离散过程，可以认为鬃人主体相对其中轴的定轴转动仍是连续且均匀的。

相对杆建立坐标系：

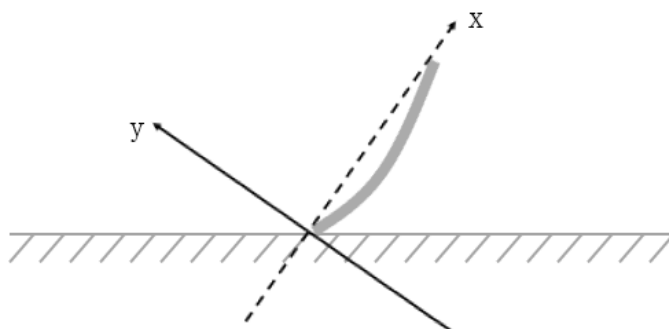


图8 杆坐标系

认为尖端为轻质，当尖端存在形变时，基于其完全弹性的假定，尖端必然存在恢复原有构型的趋势，当其受到外力作用时，内部产生的正应力满足：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

式中， σ_x 为 x 方向的正应力， σ_y 为 y 方向的正应力， τ_{xy} 为 x 方向的切应力在 y 方向的分量， τ_{yx} 为 y 方向的切应力在 x 方向的分量。

其中，由切应力互等定理， $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 。我们通过广义胡克定律把应力表示出来：

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \quad (2-9)$$

其中 ε_x 为 x 方向应变， ε_y 为 y 方向应变，E 为杨氏模量， ν 为泊松比， $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 为切变模量。进而我们将毛尖的内力表示如下：

$$\begin{cases} F_x = \iint \left(\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + G\gamma_{xy} \right) dS \\ F_y = \iint \left(\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) + G\gamma_{xy} \right) dS \end{cases} \quad (2-10)$$

将外力视为沿杆方向且与沿杆方向应力相等，有 $\gamma_{xy} = 0$ ，即无切应力，使我们需要的方程简化，

$$F_{\text{外}} = \iint \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) dS \quad (2-11)$$

认为弹性尖端各截面应力均匀，有：

$$F_{\text{外}} = F_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)S \quad (2-12)$$

$F_{\text{外}}$ 提供的冲量矩使鬃人获得角动量而产生转动，接下来研究鬃人的转动模式。

2.4 鬃人的转动模式

如图，根据鬃人旋转方向定义正方向与负方向

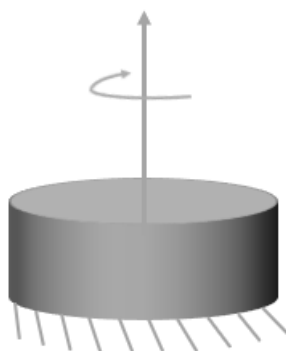


图9 旋转的鬃人

基于鬃人主体为圆柱形的简化以及鬃毛轻质的假设，鬃人相对其中轴的转动惯量为：

$$J = \frac{1}{2}MR^2 \quad (2-13)$$

式中，M 为鬃人质量，R 为鬃人柱形部分的半径。
根据角动量定理：

$$M = I\beta \quad (2-14)$$

对鬃人主体，有：

$$\beta = N \cdot \frac{2ES(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)\cos\theta}{MR^2(1-\nu^2)} \quad (2-15)$$

式中，N 为圆周上鬃毛综述，E 为杨氏模量， ν 为泊松比

由(2-15)式，可知 β 为关于 ε_x ， ε_y ， θ 的函数，即：

$$\beta = \beta(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \theta) \quad (2-16)$$

认为鬃毛主体部分的刚性确保了各鬃毛倾角始终为 θ ，即 θ 对各鬃毛倾角固定的单一鬃人而言为常量，故：

$$\beta = \beta(\varepsilon_x, \varepsilon_y) \quad (2-17)$$

$$\beta \propto \varepsilon_x \quad (2-18)$$

$$\beta \propto \varepsilon_y \quad (2-19)$$

根据 (2-1) 式, 平面在 y 方向存在简谐振动, 由于平面的振动是应变 ε_x 与 ε_y 产生的直接原因, 近似认为应变 ε_x 与 ε_y 与振动面 y 方向位移 $y(t)$ 线性相关, 即:

$$\varepsilon_x = A_x \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-20)$$

$$\varepsilon_y = A_y \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-21)$$

式中, A_x 与 A_y 分别为尖端在产生的最大应变, $A_x \geq 0, A_y \geq 0$ 。

特别地, 显然尖端只存在压缩导致的应变, 故应变 ε_x 与 $\varepsilon_y \geq 0$, 即:

$$\omega t + \varphi \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$$

该近似的合理性基于如下观察: 认为振动面初相位 $\varphi=0$, 当振动面上升, 其振动相位增加, 应变产生, 并随振动面的的上升而增大, 在振动面下降至原高度的过程中, 应变亦随之减小, 在这一周期性重复的过程中, 二者表现出一定程度的线性相关性。

将(2-20)式与(2-21)式代入(2-15)式, 有:

$$\beta = N \cdot \frac{2ES(A_x + \nu A_y)[\sin(\omega t + \varphi) + \sin(\omega t + \varphi)]\cos\theta}{MR^2(1 - \nu^2)} \quad (2-22)$$

其中,

$$\omega t + \varphi \in [2k\pi, 2k\pi + \pi]$$

β 为关于 t 的函数, 即:

$$\beta = \beta(t) \quad (2-22)$$

代入相关参数, 利用程序 Geogebra 作得角加速度 $\beta(t)$ 示意图像如下:

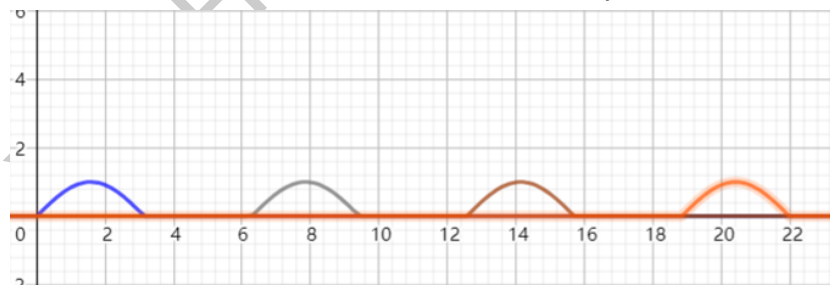
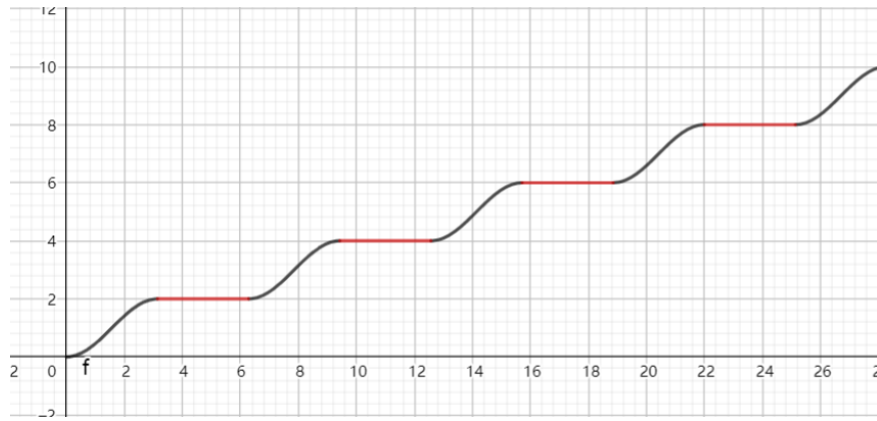


图 10 β - t 示意图

基于模型对上述图像做出如下解释: 图中正弦曲线部分表示平面向上振动, 角加速度随平面振动相位改变; 图中 $\beta = 0$ 部分表示平面向下振动, 鬃毛舒张, 内部应力逐渐直到消失, 该阶段平面对作用力为 0, 角加速度为 0。

对角加速度进行积分, 得到旋转角速度 $\omega(t)$ 图像如下:

图 11 $\omega-t$ 示意图

可以观察到，平面向上振动时，平面作用力对鬃人产生冲量矩，其旋转角速度增加；平面向下振动时，认为鬃人所受外力矩为 0，其旋转角速度恒定。

基于上述分析，角加速度 β 呈快速周期性变化，在较大时间尺度上可以认为其恒定，旋转角速度 ω 整体上应与时间 t 正相关，后续将通过定量实验对该结论进行验证。

2.5 鬃人转动的影响因素

基于上述分析，我们对影响鬃毛转动的可能因素进行如下讨论：

对于鬃毛，在一定范围内，鬃毛数量与角加速度正相关，鬃毛倾角与角加速度正相关，鬃人总质量与角加速度负相关。

需要指出，上述的“一定范围”意为各项条件相对不极端，使尖端与表面的相互作用模式基本吻合——显然，我们的模型并不普遍适用于一切情况，如鬃毛倾角趋于 0 的极端情况，在这样的情况下，鬃毛尖端及主体部分必然产生极显著的切应变，同时平面对尖端产生的作用力也必然无法满足沿杆且等于正应力的假设。

对于振动面，其振幅应与 A_x 与 A_y 线性相关，故推测振幅应与鬃人转动角加速度正相关；上式并未直接揭示振动频率与鬃人运动间的关系，但基于模型推测，尖端错动频率应与振动频率正相关，同时认为在非理想情况下鬃毛在错动过程中会因与表面接触而获得沿杆向上的冲量，故推测振动频率应与鬃人转动角加速度正相关。

接下来进行实验以验证上述理论合理性。

3. 实验与数据分析

3.1 实验概述

3.1.1 实验装置及原理

所用到的实验装置如下：

1. 音响：发出特定声波驱动平面受迫振动
2. 电脑：使用虚拟仪器软件作为音响的信号发生器
3. PMMA 板：提供振动平面
4. 振动传感器：测量平面振幅
5. 秒表：测量时间
6. 摄像机：拍摄实验过程
7. 胶带：将鬃毛固定与木块边缘
8. 木块：“鬃人”主体部分
9. 鬃毛：驱动木块



图 11 简易鬃人模型



图 12 手持式测振仪



图 13 音响

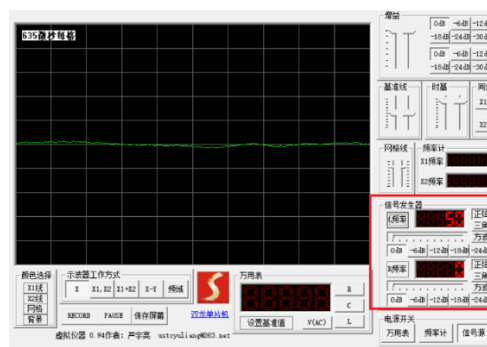


图 14 虚拟信号发生器

实验基本原理如下：

(1) 驱动受迫振动：使用电脑中的虚拟仪器软件，模拟信号发生，可以放出特定频率的声音驱动 PMMA 板进行受迫振动

(2) 振动表面：将 PMMA 板放置于音响平面上，得到平整平面。以音响发出的声波为纸张提供周期性策动力，使其实现周期性振动，对平面，有：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega t$$

上式存在通解：

$$x = A^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \alpha) + A_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

前项为暂态项，随时间增加，前项趋近于 0，得到以恒定振幅和频率振动的稳定平面，其振动频率为 f_0

其振幅为：

$$A_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

(3) 振幅的描述：振动传感器

需要注意的是，这虽然是一个手持的测振仪不需要复杂的安装程序。但根据产品说明书，振动传感器可以在力的范围内工作。因此，手持设备的人施加的压缩力的微小波动或变化不会给振动的测量带来显著差异。这符合我们的经验。



图 15 使用振动传感器测量振幅

(4) 鬃人转动角度的测量：Tracker

在鬃人上部以记号笔标记出一条半径，摄像机俯视拍摄，利用 tracker 处理实验视频，以被标记半径旋转的角度表示鬃人转过的角度，进而得到鬃人旋转的旋转角度 φ 与旋转角速度 ω 。

3.1.2 实验步骤

主要实验步骤如下：

1. 在圆柱体底面做好标记，将鬃毛用胶带缠绕在圆柱体边缘。

2. 将音响平放于水平桌面，PMMA 板置于音响上方。

3. 将音响与电脑连接，之后使用虚拟仪器软件放出特定频率的声音，PMMA 板受迫振动，形成以稳定频率震动的平面。

4. 将制作完成的“鬃人”置于 PMMA 板上，然后点击开始播放声音，并录制实验视频

5. 分别在各组实验中改变鬃毛长度、鬃毛倾角、鬃人质量，振动表面频率振幅，重复步骤 1-4。

需要指出的是：改编自变量，其余控制变量的值分别为倾角 20 度，频率 70Hz，振幅 100 微米，质量 5.0 克。

3.2 鬃人相关参数对其运动影响

3.2.1 鬃毛的长度

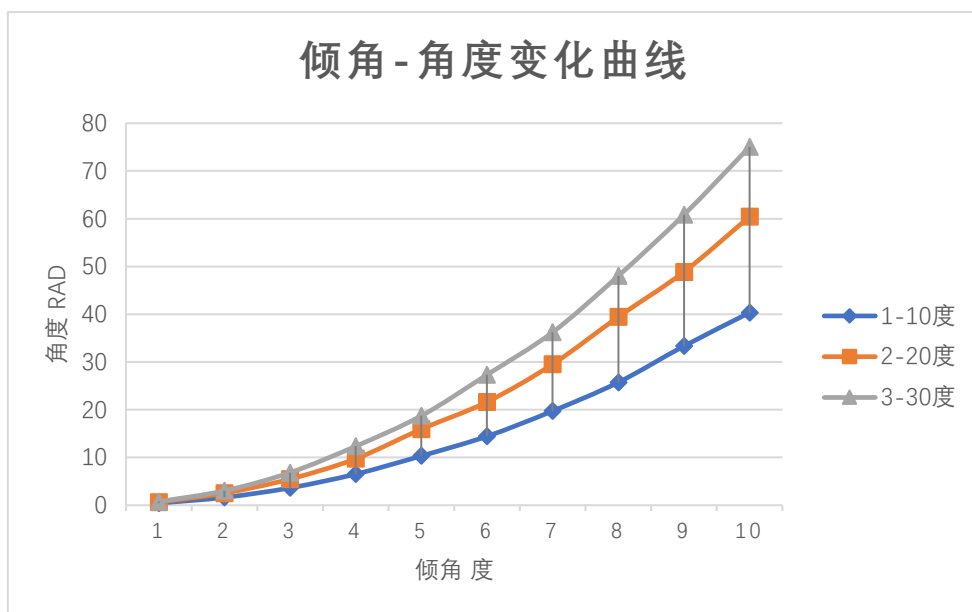
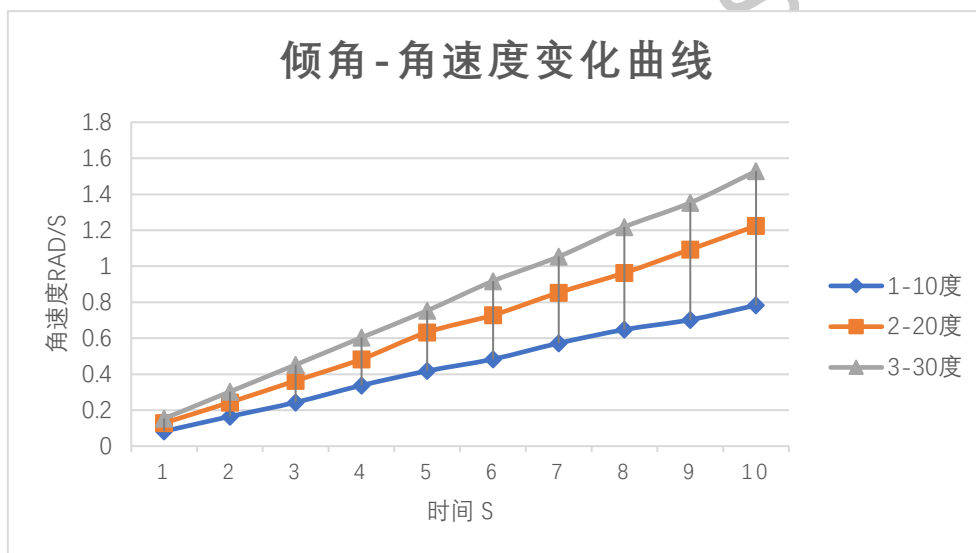
经实验测定，在实验研究范围内，鬃毛长度与无显著相关性。

需要强调与重申的是，上述结论应只在鬃毛长度处在一定范围内时适用，上述的“一定范围”意为各项条件相对不极端，鬃毛的刚体-连接体模型仍基本适用，使尖端与表面的相互作用模式基本吻合。

我们推测，当鬃毛长度超过一定限度时，鬃毛主体部分无法再视为刚体，整根鬃毛会出现显著切应变，鬃毛的刚体-连接体模型不再适用，本文不对这种情况进行讨论。

3.2.2 鬃毛的倾角

基于理论的探索，我们选定了 10 度-30 度的倾角作为研究范围。保证其余控制变量不变，改变倾角，得到的实验数据如下：

图 16 倾角 θ -旋转角度 φ 图 17 倾角 θ -旋转角速度 ω

通过拟合，可以得到倾角与角速度的关系：

在一定范围内（倾角小于等于 30 度），角加速度与倾角呈正相关关系。对于每一组实验而言，时间与角速度关系为近似一次线性增长，而角加速度几乎恒定，这与我们的理论大致吻合。

3.2.2 鬃人的质量

基于前文的计算我们猜想质量仅仅改变鬃人转动惯量，质量大小应当与角加速度成反比。为了验证这一猜想，我们采用在鬃人之上承载微量沙子的方式改变其质量，实验得到如下结果：

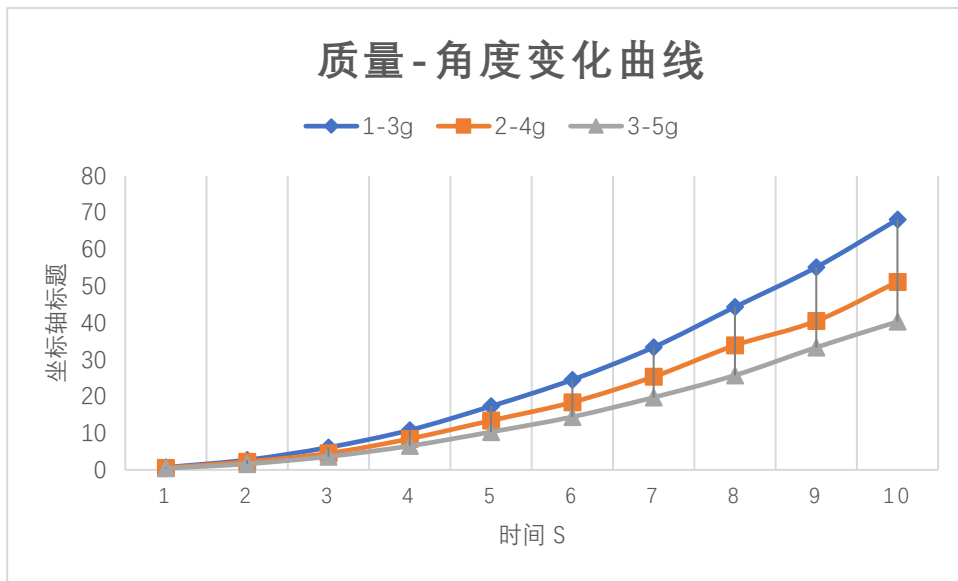


图 18 质量 m -旋转角度 φ

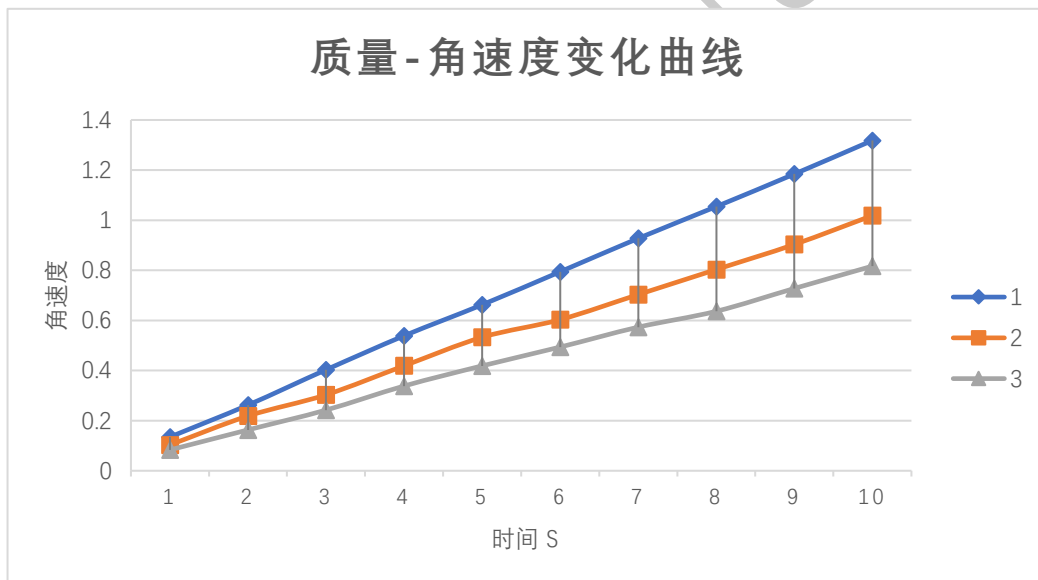


图 19 质量 m -旋转角速度 ω

通过拟合，可以得到倾角与角速度的关系：

在一定范围内，鬃人的质量不至于改变鬃毛形态时，角加速度与倾角呈正相关关系。对于每一组实验而言，时间与角速度关系为近似一次线性增长，而角加速度几乎恒定，这与我们的理论大致吻合。

3.3 振动表面相关参数对鬃人运动的影响

3.3.1 振动表面的振幅

保证其余控制变量不变，改变振幅，可以得到如下的实验结果：

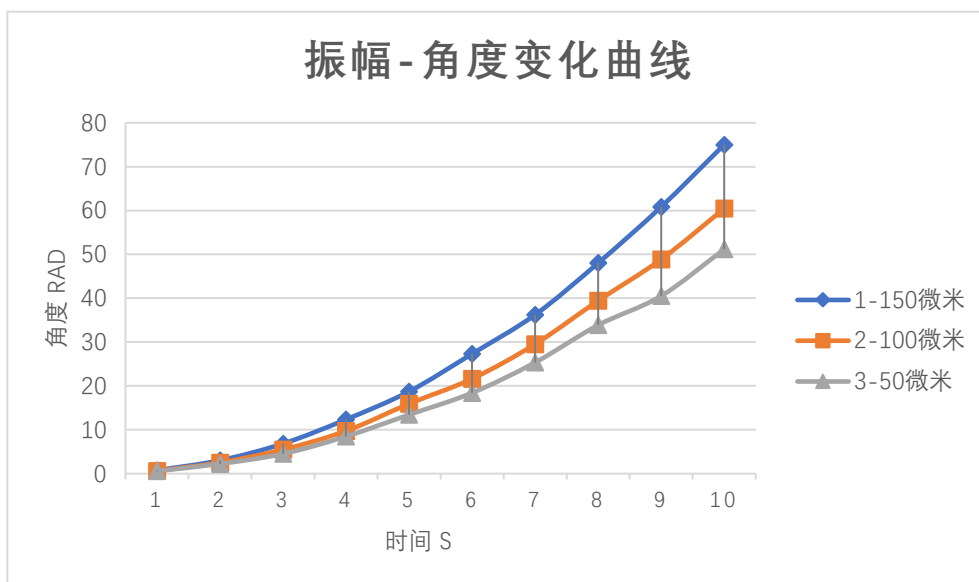


图 20 振幅 A-旋转角度 φ

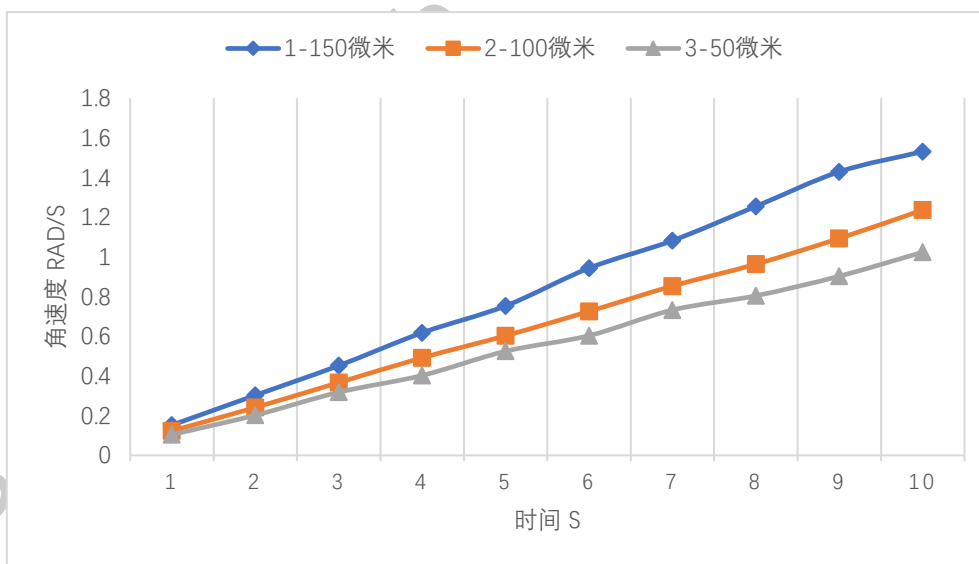


图 21 振幅 A-旋转角速度 ω

通过拟合，可以得到倾角与角速度的关系：

在一定范围内，振幅不至与影响平面整体性质时，角加速度与振幅呈正相关关系。对于每一组实验而言，时间与角速度关系为近似一次线性增长，而角加速度几乎恒定，这与我们的理论大致吻合。

3.3.2 振动表面的频率

需要强调的是，受实验器材的限制，当频率过低时可能引起平面与音响共振，为了尽可能消除这一影响，我们选定了较为适宜于探究的频率区间进行实验，保证其余控制变量，改变表面频率，可以得到如下结果：

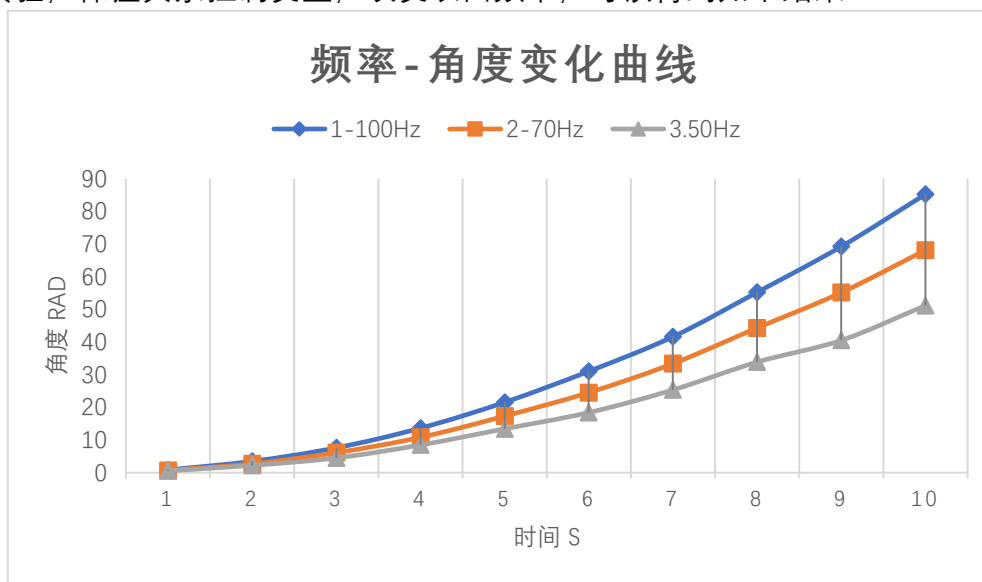


图 22 频率 f -旋转角度 φ

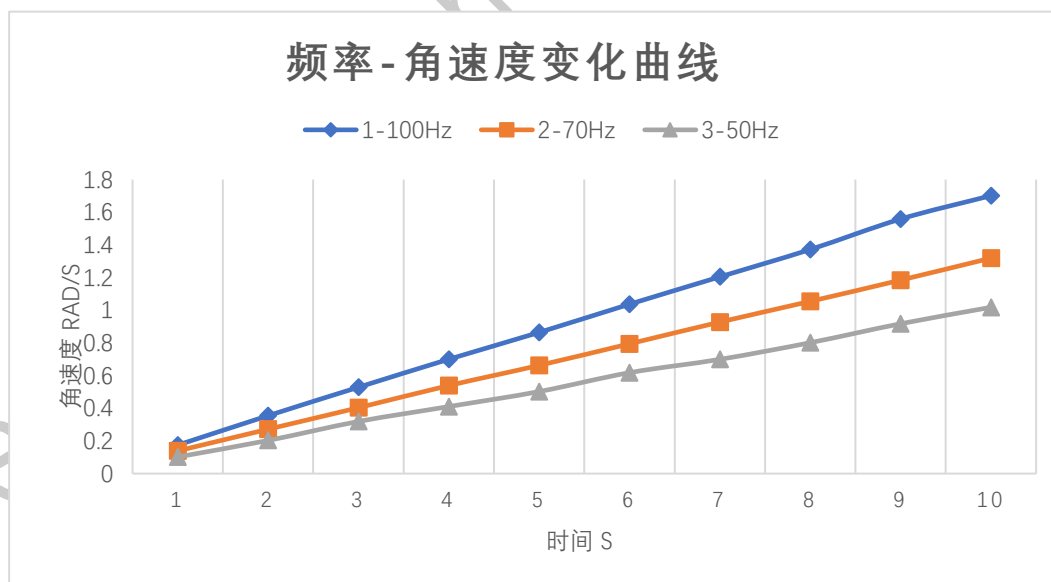


图 23 频率 f -旋转角速度 ω

通过拟合，可以得到倾角与角速度的关系：

在一定范围内，声援频率不引起平面共振时，角加速度与振幅呈正相关关系。对于每一组实验而言，时间与角速度关系为近似一次线性增长，而角加速度几乎恒定，这与我们的理论大致吻合。

3.4 误差分析

总体来讲实验的可操作性和精确度还是令人满意的，但通过分析与理想结果的差别，我们认为误差的主要来源有：

- (1) 在组装器材时无法保证每根鬃毛精确的达到某一长度且严格相同
- (2) 鬃毛在实验过程中可能出现的磨损
- (3) 震动平面本身性质并不是严格刚体
- (4) 在放置“鬃人”时人为可能对其造成的微小影响

迫于实验器材固有条件的限制，以上问题我们无法有效解决，但上述误差总体对实验现象及所测量的各物理量影响较小，并未影响基于理论分析的定性结论的验证，实现数据处理得到的结论与理论分析得到的结论仍基本吻合。

4. 总结与展望

4.1 总结

综上所述，本文的主要结论如下：

(1) 振动表面诱导振动在鬃毛内部以波的形式传递，波的耗散与弥散使振动仅局限于鬃毛尖端部分。

(2) 表面振动使尖端产生形变，尖端产生应力，表面对尖端产生作用力 $F_{外}$ ， $F_{外}$ 对鬃人主轴产生冲量矩，鬃人获得角动量；振动表面下降，鬃毛舒张，内部应力减小至消失，尖端发生若干次错动。

(3) 理论建模分析与实验共同揭示，在一定范围内，鬃毛数量与鬃人定轴转动角加速度正相关，鬃毛倾角与角加速度正相关，鬃人总质量与角加速度负相关，鬃毛长度与角加速度无显著相关性。

(4) 理论建模分析与实验共同揭示，在一定范围内，振动面振幅与鬃人转动角加速度正相关，振动面振动频率应与鬃人转动角加速度正相关。

本文较为成功地基于力学与弹性力学分析了鬃毛尖端受力并，解释了鬃人在振动表面产生转动的原因，并探究了振动表面及相关参量对鬃人转动的影响。

4.2 展望

基于我们的研究以及该领域已有研究，我们做出如下展望：

(1) 在研究尖端受力时，我们将视作轻质弹性杆，为了可基于弹性力学与弹性杆相关理论建立更完备的模型对其进行分析，同时可以采取计算机程序模拟的方式更为形象化地表现平面振动与尖端产生形变的模式，以及鬃人自身的转动模式。

(2) 为了物理学模型的简洁与理论分析的便捷，我们在研究尖端与平面相互作用模式时进行了一定量的近似与假定，如将认为平面对尖端产生的作用力沿杆、近似认为平面振动为简谐振动、近似认为应变 ε_x 与 ε_y 与振动面 y 方向位移 $y(t)$ 线性相关等，进一步研究中可将在相关方面进行深入探究。

(3) 2.4 中建立的鬃人转动模型在解释表面振动频率对鬃人转动的影响方面存在缺陷，并不能直接表征实验中观测到表面振动频率与鬃人角加速度间存在正相关关系。我们基于模型推测，尖端错动频率应与振动频率正相关，同时

认为在非理想情况下鬃毛在错动过程中会因与表面接触而获得沿杆向上的冲量，因此振动频率应与鬃人转动角加速度正相关。希望可以在未来建立更加精细化的模型，对鬃毛尖端发生的错动过程进行研究。

(4) 在实验中观察到，将鬃人置于振动表面一段时间后，其转动角速度会趋于稳定，在部分实验中也会出现旋转稳定性被破坏的现象，因此，我们认为其旋转角速度存在限度，推测导致该现象的原因可能是错动过程导致的能量损耗。在未来的研究中，我们会基于对错动过程的进一步分析解释该现象。

(5) 受实验设备条件及测量仪器精度所限，实验存在一定系统性误差，在未来更进一步地研究中会争取改善实验设备条件、提高实验设备精度以规避误差。

参考文献

- [1] 薛强.《弹性力学》[M].北京:北京大学出版社,2006
- [2] 杨桂通.《弹性力学》[M].北京:高等教育出版社,2017.10
- [3] 郭建刚.有限变形弹性杆中应力波的波动行为及其传播特性[D].太原:太原理工大学, 2003.5

2021 S.-T. Yau High School Science Award

致谢

本课题灵感源于对北京传统民俗手工艺品髹人的观察，其在被敲击表面上奇特的运动模式引起了我们的好奇，因此，我们基于机械振动相关与弹性杆理论对其运动模式进行了分析。

在课题研究过程中，苗庭嘉负责选题、理论建模、统筹规划与论文撰写，刘澍泽负责文献查阅及理论分析，郑梓歆负责实验及数据处理。

本课题指导教师陈曦老师任教于中国人民大学附属中学，为课题组成员研究性学习项目的指导教师，曾带领本课题组苗庭嘉、郑梓歆两位同学参加中国青年物理学家竞赛（CYPT）并取得国家级特等奖。在课题研究方向的确定与弹性杆理论的应用等方面，陈曦老师提出了具有建设性的宝贵意见。陈曦老师对本课题的指导工作全程无偿。

衷心感谢陈曦老师对本课题的悉心指导，他对物理学的热忱与渊博的学识为我们留下了深刻的印象，他的言传身教将使我们受益终生。

感谢本课题组成员共同的母校——中国人民大学附属中学，本课题的顺利完成离不开母校的大力支持，母校严谨的学风时刻激励着我们上下求索，母校“崇德 博学 创新 求实”的精神是我们前进动力的源泉。

本课题研究全程独立自主，除陈曦老师给予的指导外，课题组并未在其他任何人员的协助下取得研究成果。

最后，感谢各位教授对本论文的审阅工作，如果有幸得到认可，我们将不胜感激。