

参赛队员姓名：龚展贤、陈姝羽、刘京

中学：北京大学附属中学

省份：北京市

国家/地区：中国

指导教师姓名：马继云

论文题目：弹性膜上的星空：从牛顿到爱因斯坦的引力观

2021 S.-T. Yau High School Science Award

本参赛团队声明所提交的论文是在指导老师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。尽本团队所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。若有不实之处，本人愿意承担一切相关责任。

参赛队员： 龚展贤，陈姝羽，刘京 指导老师： 马继云

弹性膜上的星空：从牛顿到爱因斯坦的引力观

摘要：在一垂直于重力场放置的弹性膜中心放置一重球，膜会弯曲。在该膜上，以不同给定初始条件（速度、位置）释放的轻球会绕着中心球体做形态各异的曲线运动。这一现象在牛顿力学的框架下类比了爱因斯坦的引力观：物质（重球）告诉时空（弹性膜）如何弯曲，弯曲的时空又指导物质（轻球）如何运动。这一体系可以视为一个用弹性膜形变类比的二维“引力世界”。本文首先分析了该体系中膜的形状，发现在小形变情况下，膜上距离中心重球距离为 r 处的势能满足 $\varphi \propto \ln r$ 。由此，给出了轻球在这一二维“引力世界”中受到的“万有引力”为 $F \propto 1/r$ ，且“引力常数”与中心天体质量及膜的张力系数有关。进一步，本文通过分析轻球的受力建立动力学方程，并利用 MATLAB 求解得出了轻球在这一二维曲面上多种运动轨迹的模拟。

为了验证理论模型并探索该“引力世界”中更丰富的动力学规律，本文利用橡皮膜自主搭建了一个可控“中心天体”质量的“引力世界”实验装置，并在精准控制小球释放初速度的前提下，得到其运动轨迹并加以分析。结果表明，小球在薄膜上的运动受到的阻力较大，即使在垂直于径向的方向上以恰好可以做圆周运动的速度释放，也会逐渐趋近于中心。在阻尼的影响下，小球的速度在运动过程中不断减小，从而不能维持圆周运动。当同时释放初速度大小有微小差异的小球时，不同小球在同一时间内运动的轨迹在形状上不会产生过大的差异，但是会形成近似于互相平行的轨迹。即控制了小球的释放角度和释放位置一致，但是由于释放速度轻微的差异，可以看到它们在膜上形成了类似星系中星体运动的轨迹。随着两个小球在膜上的运动时间越来越长，两个小球的轨迹差异也被放大，真实的天体绕中心天体运动时也会出现类似情况，轻微的不同会随着运动时间变长而被放大，且阻尼使得它们以一个相似的速率趋向于中心天体。随后本文通过释放两个质量大的球体模拟出双星系统的运动规律，并且观测到与实际双星运动相符的运动现象。同时通过给中心小球施加力的方式模拟了引力波现象，并且得到了与无引力波时轨迹存在差别的结果。

关键词：弹性薄膜，阻尼运动，二维引力场，天体力学

目录

1.	引言	5
2.	理论分析	6
2.1	弹性薄膜在中心作用力下的形变	6
2.2	物体在弯曲弹性薄膜中的运动	7
3.	构建二维引力世界	11
3.1	实验设计以及器材搭建	11
3.2	万有引力常数的测量	12
3.3	二维引力世界的天体运动规律	14
3.3.1	单一小球的运动	14
3.3.2	多小球的运动	18
3.3.3	双星系统	19
3.3.4	震荡的中心天体-初探引力波	21
4.	总结与展望	23
5.	参考文献	23
	致谢	24
	附录：Matlab 数值模拟使用程序	25

1. 引言

早在三百年前，牛顿根据对苹果的掉落以及地月的运动等现象的分析构建出了牛顿力学，成为经典力学的理论框架。牛顿理论具有绝对的时空观，及时间和空间是任何运动的背景坐标，不会因为物质的运动而改变。此外，牛顿力学中万有引力是有质量的物体共有的性质，且与物体的质量大小以及距离有关。在牛顿的视野里，物体之间的相互作用力是直接存在的一种性质，而没有更深层的原因。基于以上的假设，牛顿推导出了持续三百年的经典力学的基本框架。这一套理论可以解释大部分生活中，以及宇宙中大部分星体的运动。但是随着时间的推移，人们发现了越来越多牛顿力学不能解释的现象，比如水星在近日点的进动等。到了直到 1905 年，爱因斯坦提出了与之不同的理论，即相对论。在他的看法里，物体之间这样的引力并不是真实的“力”，而是质量弯曲时空形成的引力场，这也正是他提出的区别于牛顿万有引力理论的本质。每一个有质量物体对周围的有质量物体都会产生力的作用，而并非简单的两个物体之间的相互作用。基于爱因斯坦的观点，我们可以将一个质量天体在宇宙中造成的引力理解为一个时空弯曲，进而理解为其在时空中造成的一个塌陷，这个塌陷对周围的有质量物体产生了吸引，形成了宇宙中天体的运动基础[1, 2]。

在现实生活中，被物质弯曲的时空往往极难察觉，即使是两个中子星合并产生的时空弯曲也只有用最高端的仪器才能检测出来。但是我们已知质量会使时空弯曲，相似的，力也会使物体形变，两者非常相似。特别是对于如弹簧、弹性膜、弹性球等物体而言，很容易通过施加力的方式使得他们产生肉眼可见的形变。那么，我们能不能利用常见的弹性体，去理解爱因斯坦所谓的物质让时空弯曲呢？我们是否可以用形变的弹性体去模拟形变的“时空”？

在此灵感下，本研究将一张二维的弹性薄膜用长尾夹固定在直径一米的铁环上，通过在薄膜中心放置铁球的方式在上面施加力的作用，从而使薄膜弯曲。有意思的是，在这样一张弯曲的弹性膜上，可以让一些小质量的物体，比如小玻璃珠，绕中心的大质量铁球做若干向心运动[3]。令人惊喜的是，这些具有不同特征的向心运动，与常规的天体运动有若干相似之处。这样一张弹性膜所撑开的“微缩宇宙”，可以被看作二维的引力世界。在本文的研究中，我们探索了这样一个二维引力世界中“天体”的运动规律，并与三维世界的真实引力支配下的天体运动进行对比。具体而言，本文通过理论和实验分析了这一二维引力世界中的引力势、引力常数等物理常量，进而讨论其中运动物体的动力学规律。进而通过实验定性分析了二维世界引力势中天体的运动，得到了一些普遍规律。

2. 理论分析

在本节中，我们将会分析弹性薄膜在中心作用力下的形变，并且分析在这样的薄膜上的物体运动规律。

2.1 弹性薄膜在中心作用力下的形变

在受到作用力的情况下，弹性薄膜会发生一定程度上的形变，形成向下的凹陷并且在最低点形成包络面包裹住球体，如图 1 所示。

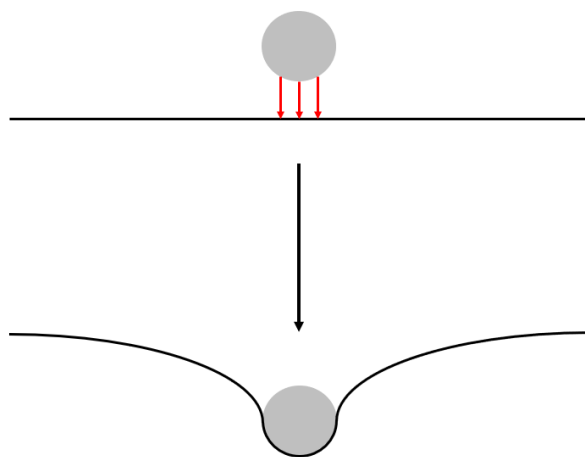


图 1 小球使膜产生形变示意图

根据先前研究的结论[1]，当在薄膜中心施加力 $F = Mg$ 的时候，薄膜产生的形变 u 遵循以下公式(以向上为正方向，无形变时为 $u = 0$ 平面)：

$$u(r) = -\frac{F \ln(r)}{2\pi\tau} = -\frac{Mg \ln(r)}{2\pi\tau} \quad (1)$$

这里 M 是膜中心放置球体的质量， $g = 9.8\text{m/s}^2$ 是我们所处真实世界的重力常数。考虑到引力场的泊松方程[3]：

$$\nabla^2 \varphi = 2\pi G_0 \rho \quad (2)$$

此处 $\varphi = mgu(r)$ 为二维有效的引力势，而 G_0 则为等效引力常数。对于膜上一质量为 m 的轻质小球，不考虑其对膜产生形变的情况下，基于先前研究，有：

$$\nabla \varphi = \frac{G_0 m M \mathbf{r}}{r} \quad (3)$$

其中 $\frac{\mathbf{F}}{r}$ 为延薄膜径向方向上的单位矢量。类比（1）、（3）可得该二维弹性“引力世界”的引力常数为：

$$G_0 = \frac{g^2}{2\pi\tau} \quad (4)$$

（4）式符合前面对于引力势和到中心距离呈 \ln 函数的规律，故可通过定义二维引力常数来使得本文模拟的二维引力场的引力势能与薄膜形变产生的重力势能一致，进而完成对二维引力场的模拟。

2.2 物体在弯曲弹性薄膜中的运动

基于得到的二维空间的引力势，我们进一步分析了此情况下膜上一质量为 m 的质点的运动情况。对于膜上运动的质点，我们对它在非惯性系中的极坐标下进行受力分析：其径向受力可以被拆分成三个不同的部分：离心力，二维引力场的引力以及与膜接触受到的阻力[3]。对于离心力而言，由圆周运动规律易得：

$$F = \omega^2 r m \quad (5)$$

其中 $\omega = \dot{\theta}$ 是质点绕中心的转速， r 为质点到中心球体的距离。二维引力为

$$F = \frac{G_0 M m}{r} \quad (6)$$

最后，引入阻力与径向速度 $v = \dot{r}$ 成正相关，我们有 $f = -\alpha m v^\delta$ ，其中 α 为阻力系数， δ 为幂指数取决于膜与球的具体接触形式。

将三部分的向心加速度结合，我们可以得到质点径向加速度（以背离圆心为正方向）为：

$$a = \omega^2 r - \frac{G_0 m}{r} - \alpha v^\delta \quad (7)$$

在以下讨论中，简便起见，我们取 $\delta = 1$ 。另外，我们考虑角向自由度的动力学。我们研究的二维引力场作为一种有心力场，质点在其中运动时根据角动量定理，我们有

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -m\alpha r^2\dot{\theta} \quad (8)$$

其中左边为质点绕中心角动量的变化率，右边为阻力矩导致的冲量矩。根据上述方程，我们得到最终的质点动力学方程组：

$$\begin{cases} a = \ddot{r} = \dot{\theta}^2 r - \frac{G_0 m}{r} - \alpha \dot{r} \\ \dot{\omega} = \ddot{\theta} = -\left(\frac{2\dot{r}}{r} + \alpha\right)\dot{\theta} \end{cases} \quad (9)$$

(9) 式即为本文后续实际分析小球在二维引力场中的运动的基础。

本研究进而利用 matlab 软件对于这一方程进行求解，当代入 G_0 数值（见 3.2 节），阻尼系数，小球质量 0.5kg 并调节初速度与第一宇宙速度的比时，可以得到一些典型的轨迹，如图 2 所示。

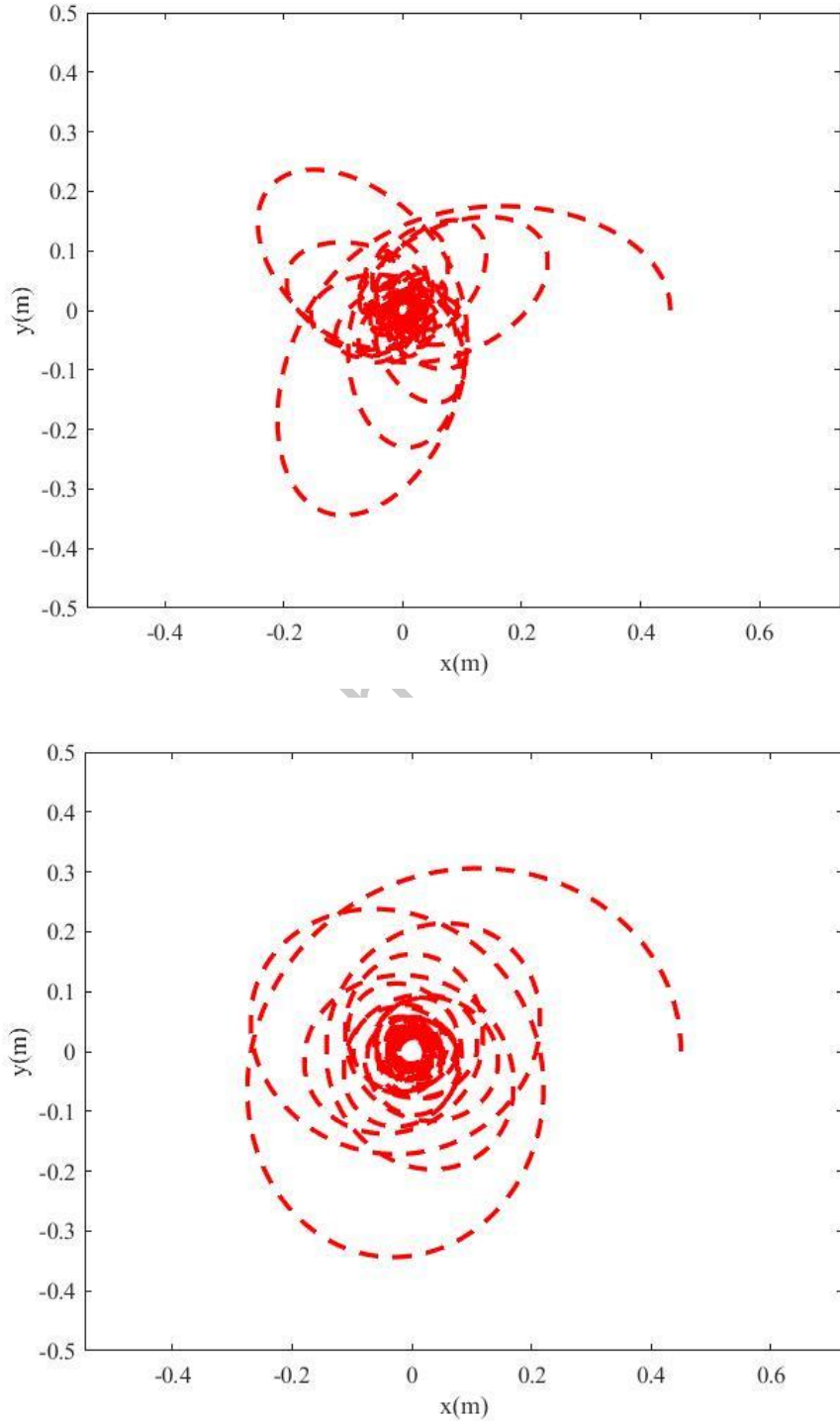


图 2 初速度与第一宇宙速度的比分别为 0.5 与 0.8 时质点的运动轨迹

通过数值模拟，我们也得到了小球径向速度以及转动圈数与时间的关系，如图 3 所示

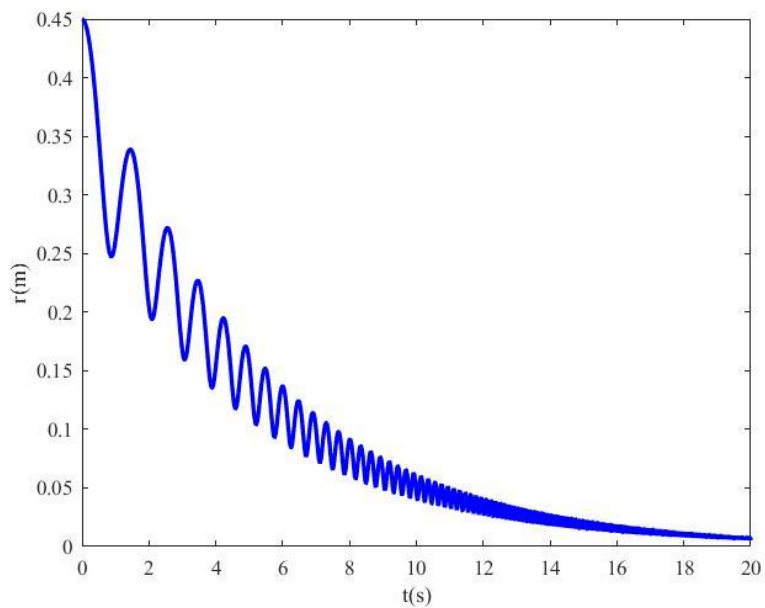
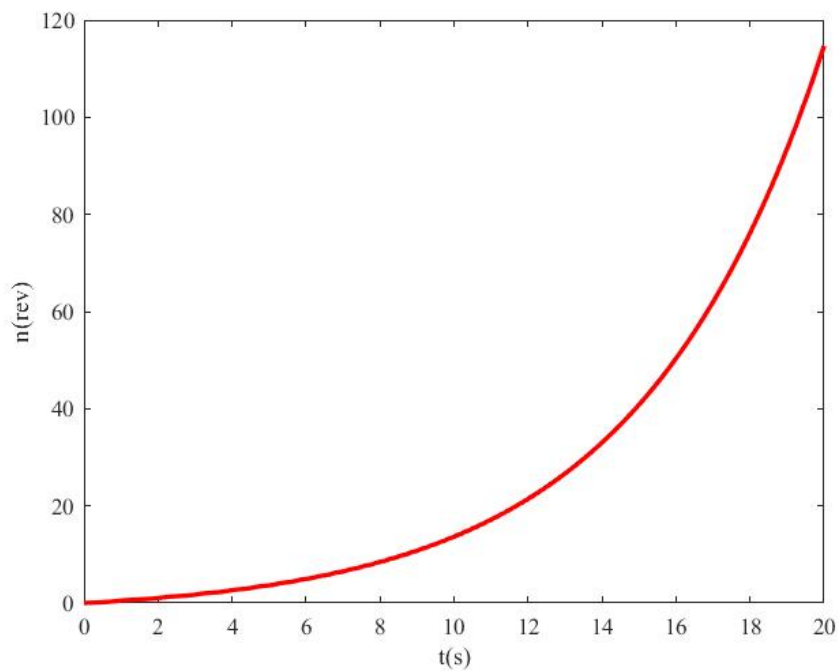


图 3 转动圈数(上)与径向位置(下)随时间的变化关系图

可以看到，小球离圆心的距离会随着时间逐渐减小，但是会产生一定程度上的震荡。这也符合实验中发现的小球到达圆心附近还会继续前行的情况相符。与此同时，从图像中不难发现小球转动圈数随着时间的延长，增加速率也随之加快。这也解释了小球靠近中心时随着转动半径的变小，转动周期也变小的情况。值得一提的是，当无阻尼发生的时候，小球的运动轨迹对称且完整，与中心的距离也不会发生衰减，如图 4 所示。

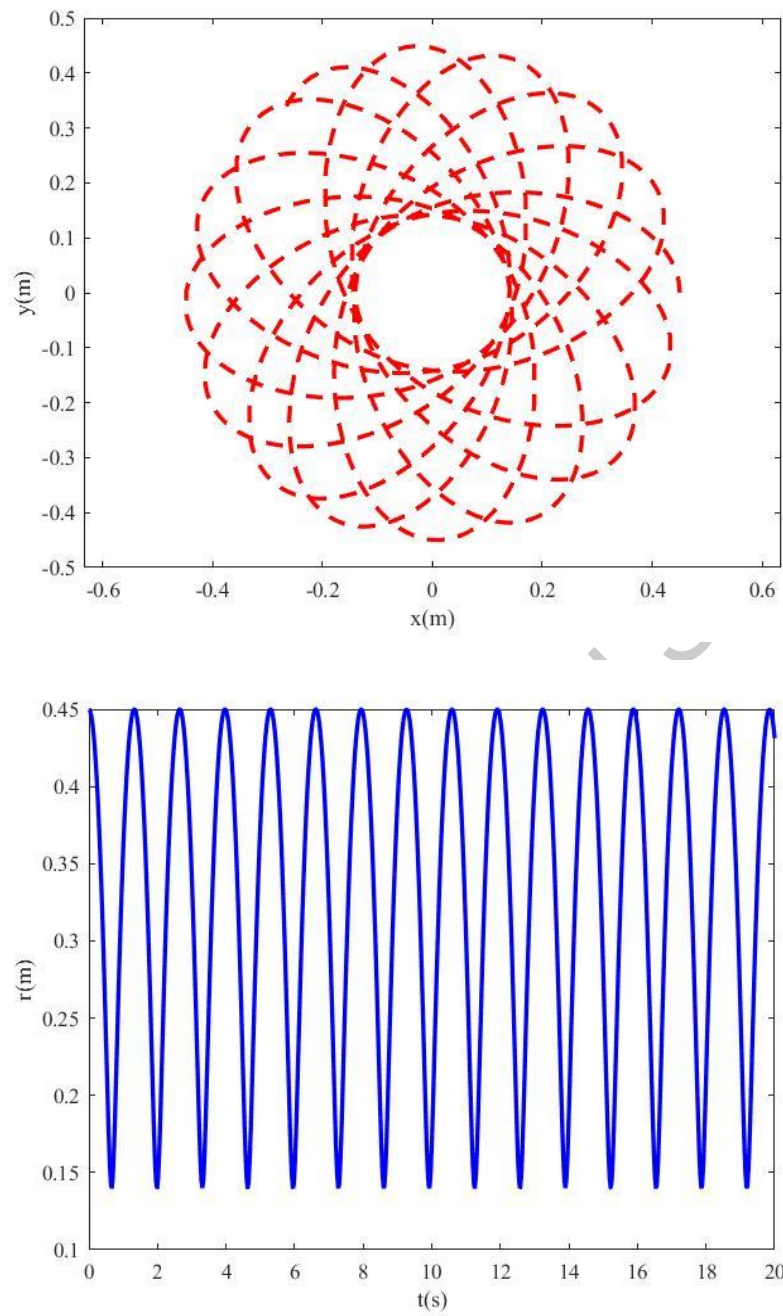


图4 无阻尼情况下的模拟运动轨迹（上）以及距中心距离（下）与时间的关系（阻尼系数设置为0，其余系数与图2、3中模拟使用的系数一致）

3. 构建二维引力世界

3.1 实验设计以及器材搭建

在实验中，本研究应用了半径为 0.5 米的圆形弹性薄膜来模拟二维的引力世界。为了确保实验结果稳定，将膜固定在了不易发生形变的钢环上。我们一共使用了三十个长尾夹来固定薄膜，确保每个长尾夹之间的距离一定（间隔为 10.5cm），并以此保证了膜的受力均匀，如图 5 所示。

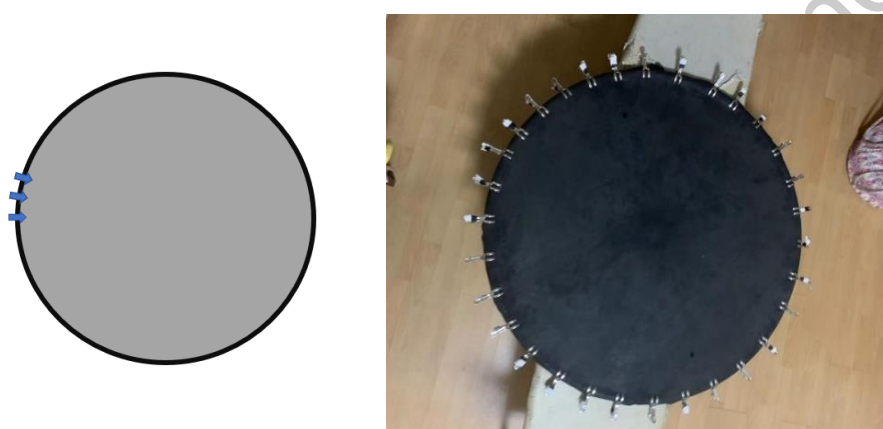
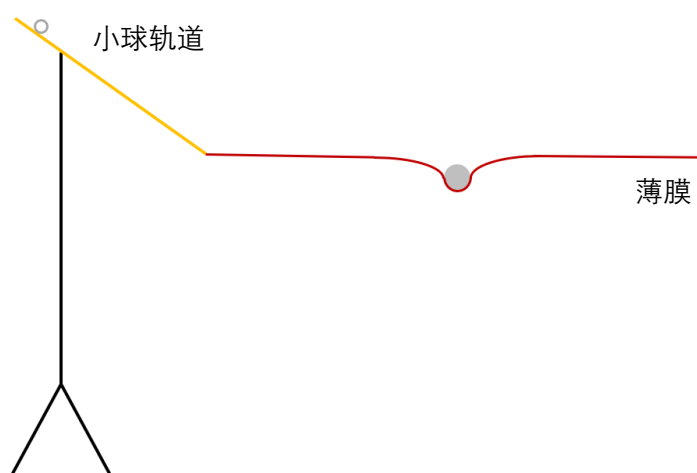


图 5 实验装置示意图（左）与实物图（右）

为确保实验器材中薄膜平行于地面，我们使用两组等高物将膜架起，在其中心位置放置实验中要用到的钢制铁球（模拟中心天体）并对其进行调整，直到铁球位置与中心重合。为了得到稳定的小球释放初速度，我们利用三脚架搭建了小球（模拟围绕中心天体运动的天体）的释放轨道。通过控制轨道可以提供给小球不同方向上的不同初速度，即将其变为可控的变量，如图 6 所示。



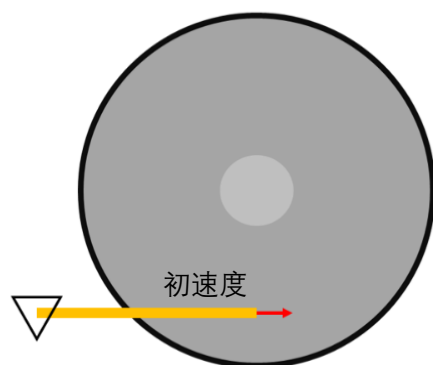


图 6 球体释放轨道示意图。上图为侧视图，下图为俯视图

至此实验装置搭建完毕，我们利用它在二维引力场中模拟一系列的常见天体运动。

3.2 万有引力常数的测量

将中心天体先依据大小与质量分成了四类：S 号天体（0.5 千克钢球），M 号天体（1 千克钢球），L 号天体（2 千克钢球），XL 号天体（5 千克钢球）。先选择 S 号天体放置在薄膜上，观察其包络面，如图 7 所示。



图 7 实验中拍摄的球体产生的薄膜包络面

首先验证薄膜的形变中竖直方向形变量与水平方向位置呈 \ln 函数的关系。对于球体在薄膜上的形变，利用图片及 tracker 软件进行打点。通过这样的方式获得一组薄膜形状的点。然后以球体质心为中心建立平面直角坐标系，并得到了这些点的坐标。将坐标值导入 matlab 软件进行拟合，得到了如图 8 所示的结果。

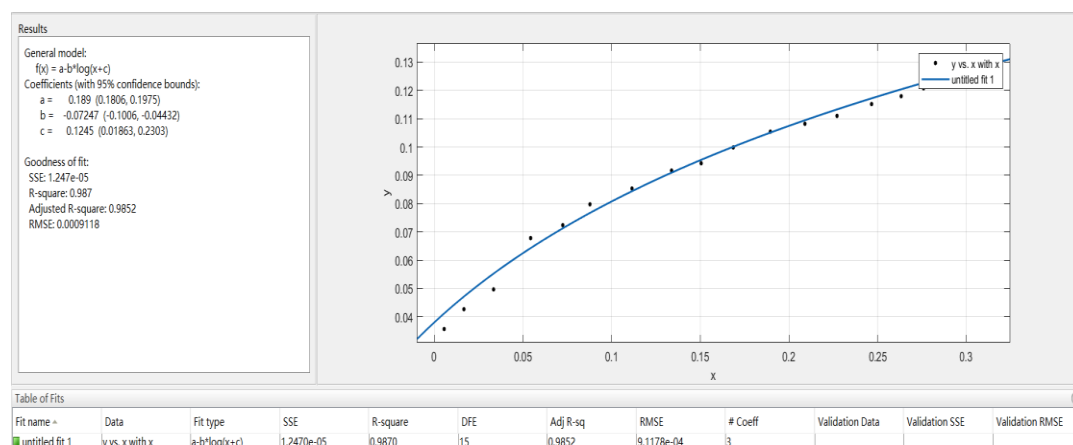


图 8 matlab 软件对于球体包络面的函数拟合结果

可以看到，以 \ln 函数进行拟合，得到的 R^2 值为 0.98 左右。以此可以认为薄膜形变的形状是 \ln 函数的曲线形状，验证了小形变下的理论结果。在此基础上利用已知的数值计算出该空间中的引力常数 G_0 。据此我们剪裁出了一段膜，将不同质量的重物悬挂在了膜上并记录其伸长量，将结果绘制出来以后利用一次函数拟合，得到其斜率为 $148.31 N/m^2$ 。实验中，通过在膜上取点定位，记录膜的伸长约为 10.3cm，从而得到 $\tau \approx 15.28 N/m$

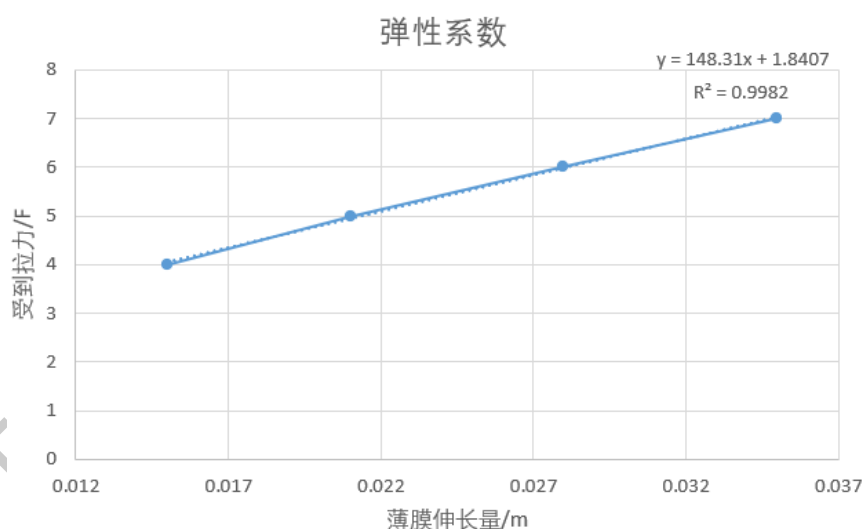


图 9 实验所用弹性膜的伸长量与受力的关系图

将 τ 的结果代入 (4) 式，就可以计算出该二维“引力世界”的“引力常数”
 $G_0 \approx 2.06 m^2 s^{-2} kg^{-1}$ ，这也是文中数值模拟时所使用的 G_0 数值。

3.3 二维引力世界的天体运动规律

在得到二维引力空间中的引力常数以后，我们对于天体在此空间中的运动进行了实验，并与理论结果相结合进行了分析。

3.3.1 单一小球的运动

对于单一的小球，我们将其在轨道上释放，对于其运动进行了录像。随后，仍使用 tracker 软件对小球的位置进行打点分析，得到了一些小球的运动轨迹，如图 10 所示

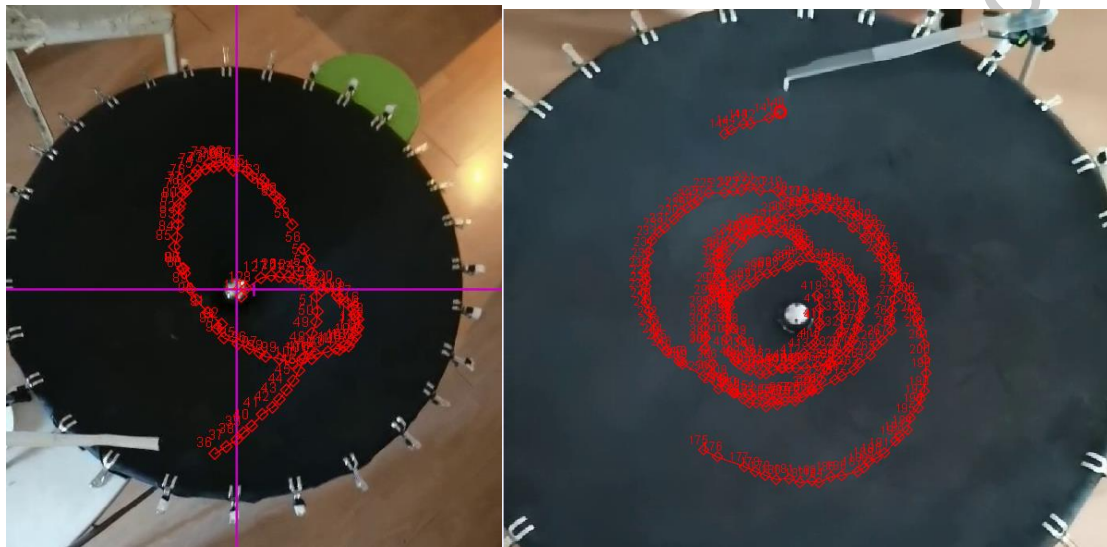


图 10 单一小球的两组轨迹

对于单一小球来说，可以看到其轨迹可以按照形状分为不同种类，包括：

花瓣形：小球向中心运动，越过球体后转回，继而再重复这一过程，如图 10-1 所示；

螺旋形：与花瓣形不同，这样的螺旋形轨迹几乎不会和原轨迹相交，如图 10-2 所示。

对于前面的花瓣形轨迹，将其图像与 Matlab 模拟的图像进行对应，如图 11 所示，吻合度较高。

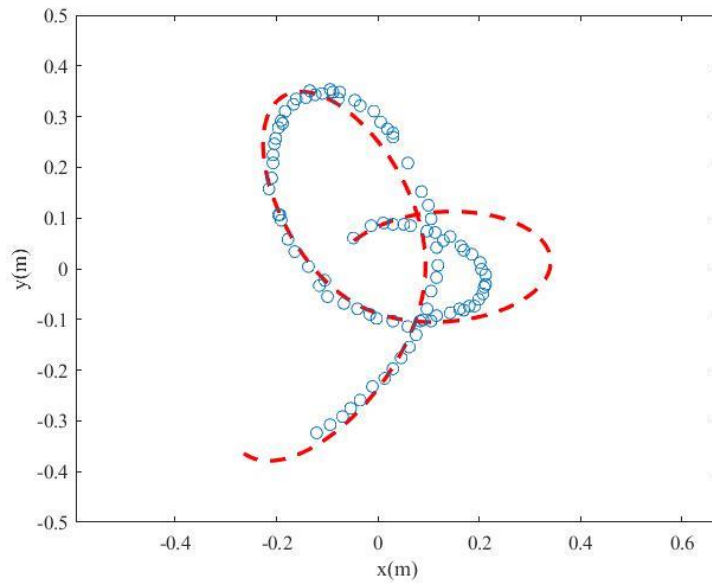


图 11 单一小球实际轨迹与模拟轨迹的对应（初始入射角度 234° ，初速度与第一宇宙速度的比为 0.4，初始径向速度为 0）

两种轨迹的区别主要在于其接近中心球体的速度。通过数值模拟，我们发现了小球初速度（矢量）与轨迹情况的关系。当改变小球在释放时在轨道上的高度，即当初速度加快时，轨迹会越发趋近于螺旋形。为了验证这一结论，实验中我们改变了小球的初始速度，得到的轨迹如图 12-14 所示，与理论模拟趋势一致。



图 12 初速度最低的小球轨迹



图 13 初速度次低的小球轨迹

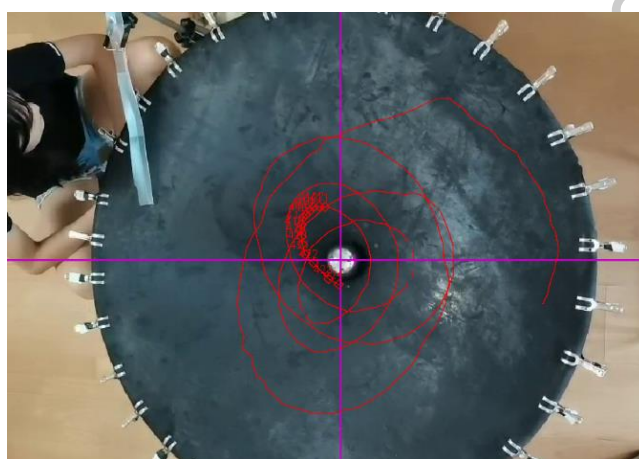


图 14 初速度最高的小球轨迹

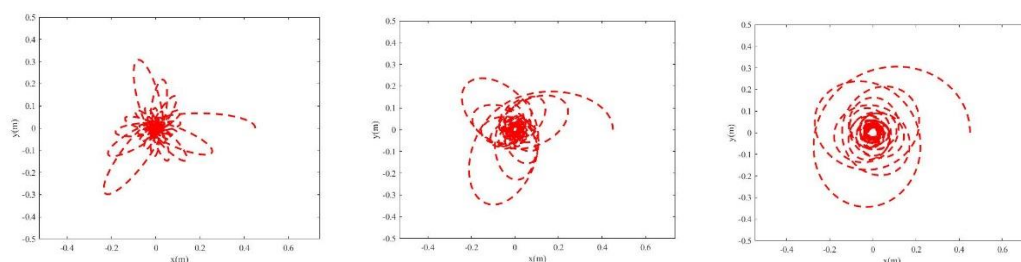


图 15 初速度与第一宇宙速度的比为 0.2, 0.5 与 0.8 时的数值模拟图像

此外，在注意到中心球体规格不同时轨迹的变化后，我们也通过实验探究了中心天体质量不同所产生的轨迹差异。分别使用质量为 510g, 2100g 与 4100g 的铁球作为中心球体，控制初速度不变的情况下用 tracker 软件记录下了小球在三个质量不同的中心球体下的不同轨迹，如图 16-18 所示。

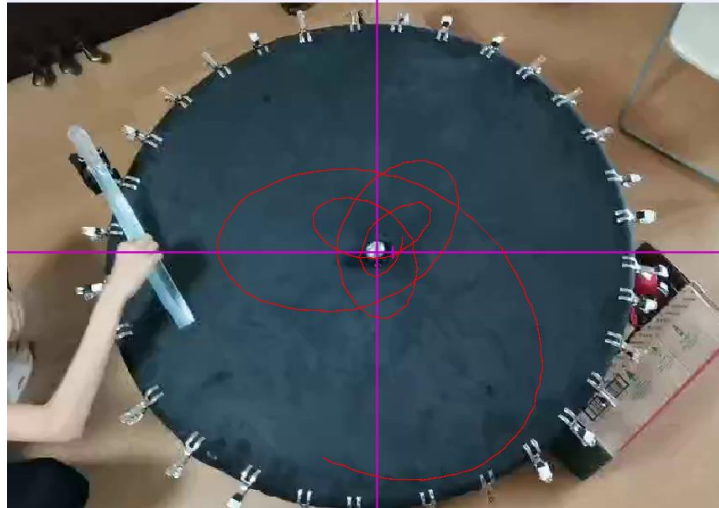


图 16 中心天体为 510g 的小球轨迹

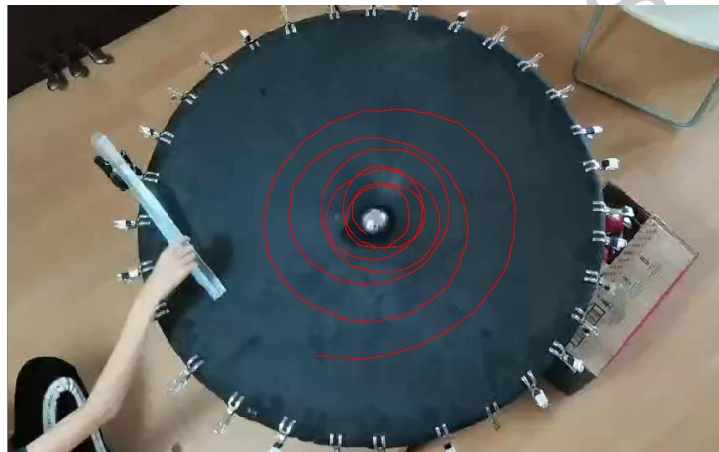


图 17 中心天体为 2100g 的小球轨迹

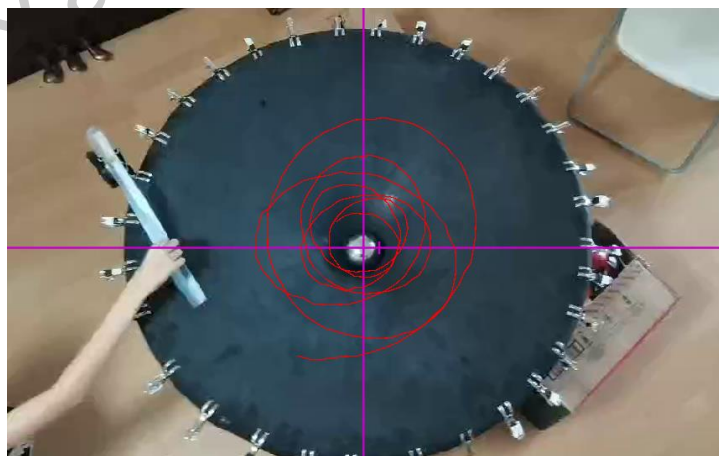


图 18 中心天体为 4100g 的小球轨迹

可以看到，小球在中心天体质量从 510g 增加到 2100g 的过程中，轨迹向螺旋形的方向改变了。当质量继续增加时，中心天体对膜产生的形变可能不再遵守前面推导的 \ln 函数模型，这也是中心天体质量增加至 4100g 的时候，小球轨迹并没有继续趋近于螺旋形的原因。我们在数值模拟中也试图去尝试了中心天体质量的改变，结果如下：

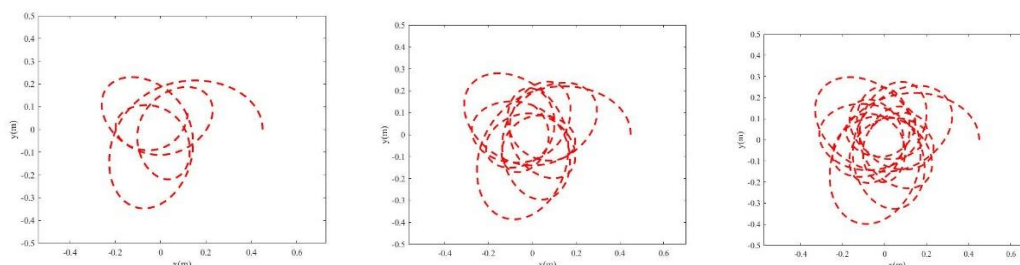


图 19 中心天体质量为 0.5kg, 2kg 与 4kg 时的数值模拟图像（初速度与第一速度比为 0.6）

可以看到，中心天体质量的增加对于小球运动的影响仅限于转动圈数的增加，与理论存在一定冲突的是，实验结果出现形状上的本质改变，这可能与上述分析的原因有关。值得注意的是，小球即使在垂直于径向的方向上释放也会趋近于中心，原因则是薄膜上的阻尼。在阻尼的影响下，小球的速度在运动过程中不断减小，从而不能维持圆周运动。而在实际天体运动中，天体在宇宙空间中收到的阻尼几乎可以忽略不计，这也是天体可以保持其运动轨迹的原因。在假定的无阻尼情况下，如 2.2 节模拟所示，其运动轨迹形状对称且完整。

3.3.2 多小球的运动

在一般的天体运动系统中，会存在不止一个的天体围绕中心天体进行运动的情况。实验中可以通过同时释放多个小球达到对该情况的模拟，如图 20 所示是两个小球同时释放时的轨迹：

与通常情况下的三维引力世界不同，本文模拟的二维引力世界带有阻尼。而在二维引力场中，我们也试着通过质量相同的球体模拟了双星系统的运动。结果如图几所示。

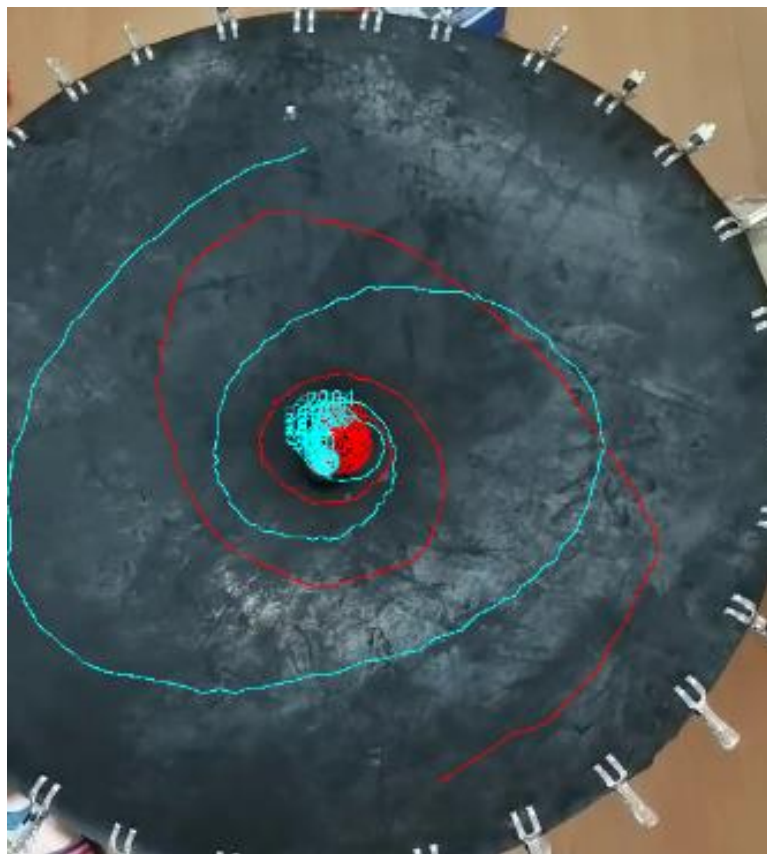


图 22 二维引力场中的双星运动轨迹

在实验的过程中，大球虽然会不可避免地出现晃动的情况。但通过观察仍然可以发现，1) 在存在阻尼的二维引力场中，双星运动中的星体会快速的沿着椭圆形轨道相互趋近，最终靠近在一起并停止运动。即使是在初始速度足够快的情况下，两个球体依旧会相互靠近并趋近中心；2) 在两个球体运动的过程中，在每个时间点上，两个球体的连线总穿过膜的重心点；在任意时刻，两个球体距离薄膜中心的距离也基本相等；两个球体的重心也始终在膜的中心点，同时也是两个椭圆的一个焦点上。与三维引力世界中的联星运动轨迹相似。我们也可以观察到，由于我们选用了质量同为 1050g 的铁球进行试验，两球的轨迹形状十分相似。在此次试验中，虽然使用了质量较轻的铁球，但是其质量相对较大，因此实验模拟的双星运动更加趋近于大质量天体的合并（类似黑洞或中子星合并的情况）。

3.3.4 震荡的中心天体-初探引力波

牛顿认为宇宙中力的传播全部是瞬时的，即如果星体的质量改变，则其周围星体的受力也会瞬间改变。之后，爱因斯坦在广义相对论中提出相互作用力的传播是需要时间，进而推理出引力的变化也不可能以超过光速的速度传播，并提出了引力波的概念。引力波的本质是时空弯曲的波纹，其本质是质量变化的天体辐射出的能量波，因此是一种物质波。在现实生活中，由于引力波的本质是时空的变化，即物体之间的距离发生极其微小的变化。在2016年，LIGO团队的科学家们通过激光检测4千米长的管道的长度变化，对比天文学家观测到的电磁波的变化证实了引力波的存在[5]。由于大质量天体普遍距离地球较远，所以引力波产生的效应往往很难探测到。而在本研究中，可以通过二维引力系统人为制造一个较大的引力系数变化，从而模拟引力波，进而通过释放小球来了解引力波可能对周围天体的运动轨迹所产生的影响。在实验中我们在释放玻璃小球前对中心球施加一个力，从而使中心球体与薄膜开始上下震动荡，模拟现实之中变化的时空以及引力常数。

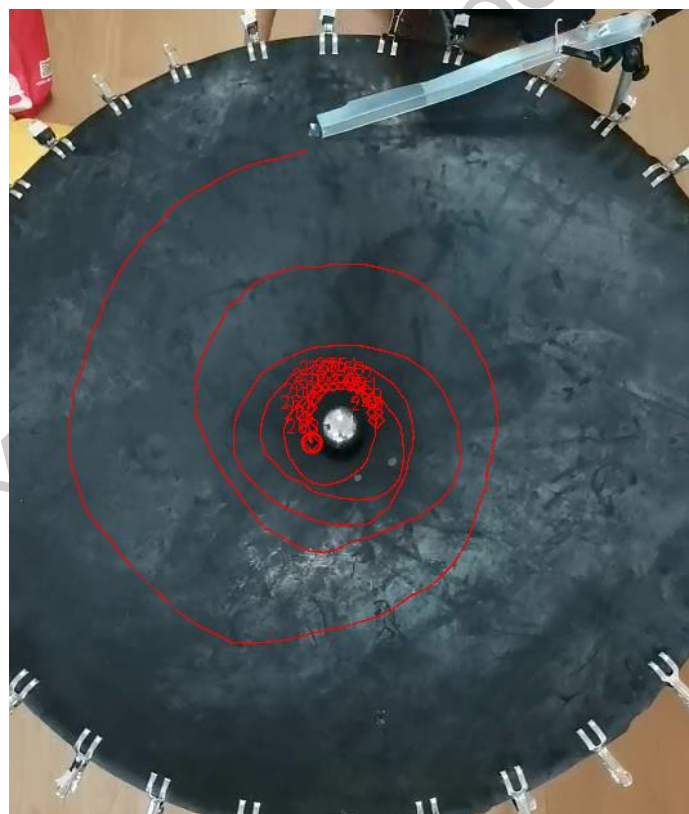


图 23 存在引力波时的小球运动轨迹（其余变量与图 12 一致）

当我们控制小球的释放角度以及初速度不变，对比有无引力波的情况时，会发现玻璃小球的运动轨迹很明显与存在引力波时的不同。在存在引力波的实验中，我们得到的小球

运动轨迹形状更加趋近于花环形，如图几所示。由于薄膜上下震荡，当中心大球向上震荡时，引力常数减小，小球受到的引力减少，因此轨迹趋近于圆周；而当大球向下震荡，引力常数增加，小球受到的引力增加，因此趋近于椭圆轨道。我们也尝试着利用数值解模拟了引力波的情况。根据中心球的震荡特性，本研究构建了关于它的三角函数，使得引力常数随时间振荡变化，进而模拟出了引力波的影响。如图 23 所示，可以看到此刻小球的轨道相比于没有引力波影响的螺旋形，更加趋近于花环形。

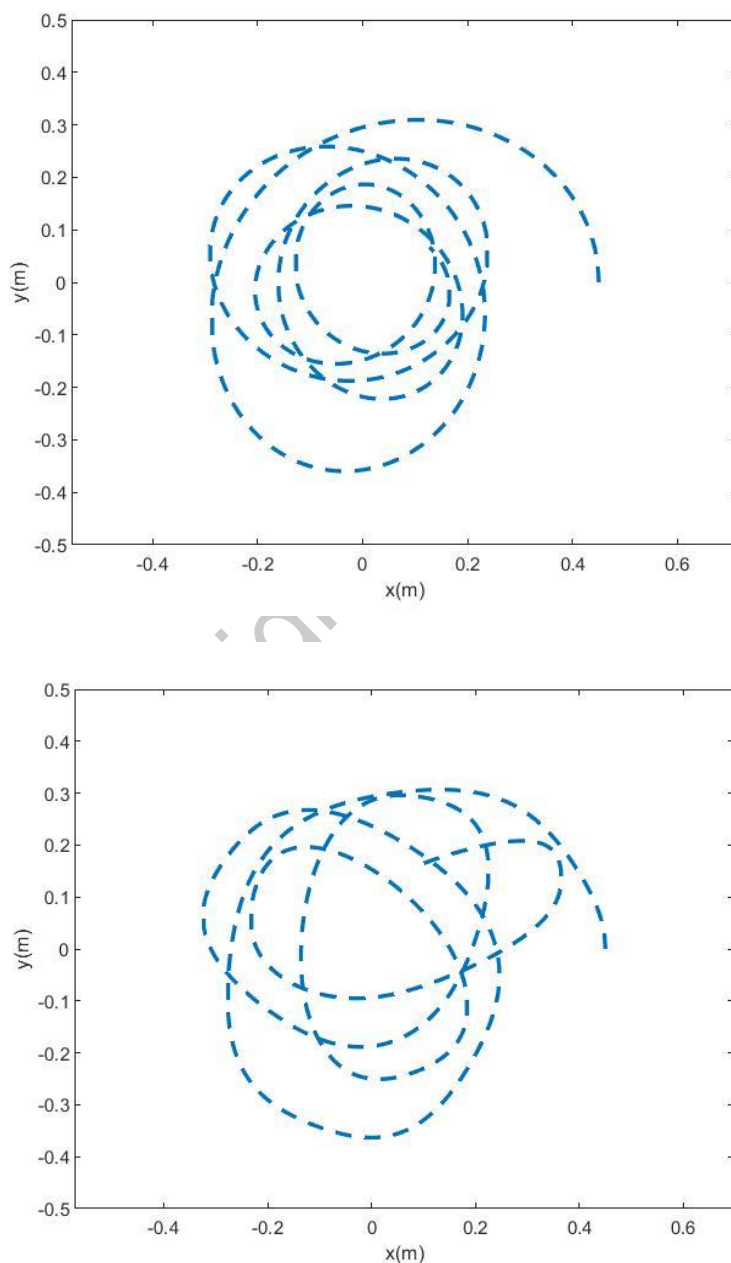


图 24 无引力波情况（上）与小引力波情况（下）数值模拟轨迹的对比

4. 总结与展望

在牛顿力学的框架下，我们研究了一张在中心重物施压下产生形变的弯曲二维膜，及其上物体的动力学及运动轨迹。这样一个弹性系统可以作为爱因斯坦引力观中弯曲时空的一个低维类比。我们给出了在这一弹性“二维引力世界”上小球的运动方程，并且使用 MATLAB 对其求解得到了若干典型的运动轨迹。我们分析了影响这一“引力世界”中物体运动轨迹的相关参数。研究表明，当膜上小球初速度加快时，运动轨迹明显会趋近于螺旋形。而当阻尼增加时，天体失去能量并趋近于中心的速率也会加快。我们也发现，初始释放角度的改变会造就轨迹更加容易趋近于花瓣形，中心天体质量的增加也会同样带来这样的变化。总的来说，理论模拟中二维引力场中的物体运动依旧遵循引力世界中物体的运动规律，但是由于二维膜上阻尼的存在以及其有效引力因为维度的不同在幂次上与牛顿引力不同，其上物质的运动与实际三维空间中的天体依旧有差异。

为了检验理论模型，我们利用橡皮薄膜和若干不同质量的铁球自主搭建了一个“二维引力世界”。实验中我们发现，天体运动在阻尼的存在下确实产生了不一样的运动规律。其运动会产生两种不同的轨迹。在我们称之为花瓣形的轨迹中，当天体与中心的距离缩短时，其速度会增加，然后当其远离中心时则会速度逐渐减缓，最终速度趋近于 0 然后转向。其能量会在每一次的过程中减小，最终收敛到中心天体的旁边。在我们称之为螺旋形的轨迹中，天体会以圆周形式进行螺旋运动，最终到达中心。

最后，我们还在实验平台上探究了更多的天体运动形式在二维引力场中的表现。我们对于多个天体的集体运动模式进行了探究，在一定程度上模拟出了双星运动与“引力波”（弹性膜的非静态振动）存在时的天体运动。实验结果虽然与实际的天体运动有所区别，但是都在定性分析中得到合理的解释。这样的实验装置在未来也可以用于模拟在暗物质、暗能量的影响下导致的更加复杂的天体运动现象，并且在这样的引力场下有潜力获得更多有意义和启发性的结论。

5. 参考文献

- [1] 漆安慎, 杜婵英. 力学:普通物理学教程[M]. 高等教育出版社, 1997.
- [2] 梁灿彬. 从零学相对论[M]. 高等教育出版社, 2013.
- [3] 程嵩, 黄小珊, 林方, 各向同性弹性薄膜模拟二维引力场的研究, 大学物理, 2014,33(7)

[4] Esmat Bekir, The true and apparent elliptical orbits of a visual binary star, Ankara university faculty of science, 2018, 60(2), 51-62

[5] Abbott, Benjamin et.al, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, 2016, 061102

致谢

本项目源自我们对科技馆中固体凹陷曲面上小球和硬币运动的思考。我们设想这样的固体曲面可以由重物在具有弹性的膜或者网上挤压形变得到，查阅文献后发现，这一想法此前已有一些研究。由此开启了本文对二维弹性膜“引力世界”的系统研究。特别地，区别于此前研究中主要讨论单一“天体”的运动。本研究我们观察了多星系统的更多复杂轨迹。

在本项目中，龚展贤负责了理论的学习推导、及数值模拟；龚展贤和陈姝羽一起负责了实验器材的搭建，实验结果的测量以及视频打点的工作。刘京负责了前期文献调研并参与了项目的部分讨论。在论文撰写中，龚展贤主要负责了理论分析和模拟部分，以及单一小球运动相关的实验部分的撰写。陈姝羽主要负责了多小球运动，双星系统以及引力波部分的撰写。所有作者参与了全文的校对定稿工作

感谢马继云老师对写作修改的建议，项目完成中的讨论，以及理论知识学习的指导；

感谢北京大学附属中学物理实验室对我们实验的支持；

感谢北京大学附属中学道尔顿学院对我们的支持和帮助。

附录： Matlab 数值模拟使用程序

基础程序：

```
function gravatationalworld
m=0.5 (中心天体质量)
G0=2.06; (二维空间计算出的引力常数)
alph=0.18; (阻尼系数)
v1=sqrt(m*G0); (第一宇宙速度)
k=0.4; (初始切向速度与第一宇宙速度的比)
theta0=234; (初始入射角度)
v0=k*v1; (初始切向速度)
r0=0.45; (初始位置与中心之间的距离)
v01=0; (初始径向速度)
```

```
options = odeset ('RelTol',1e-15,'AbsTol',[1e-15 1e-15 1e-15 1e-15]);
[T,Y]=ode45(@gravity,[0 1.89],[r0 v01 theta0/180*pi v0/r0],options);
(程序基础设置)
```

```
figure
plot(T,Y(:,1),'b','linewidth',2)
xlabel('t(s)','FontSize',9)
ylabel('r(m)','FontSize',9)
set(gca, 'FontSize',9)
(以上绘制与中心距离与时间的关系图像)
```

```
figure
plot(T,Y(:,3)/pi/2,'r','linewidth',2)
xlabel('t(Å)','FontSize',9)
ylabel('n(È)','FontSize',9)
set(gca, 'FontSize',9)
(以上绘制转动圈数与中心距离图像)
```

```
figure
plot(Y(:,1).*cos(Y(:,3)),Y(:,1).*sin(Y(:,3)),'r--','linewidth',2)
xlim([-0.5 0.5])
ylim([-0.5 0.5])
xlabel('x(m)')
ylabel('y(m)')
axis equal
set(gca, 'FontSize',9)
(以上绘制模拟天体运动轨迹)
```

```
function dy = gravity( t,y )
dy=zeros(4,1);
```

```

dy(1)=y(2);
dy(2)=y(4).^2*y(1)-G0*m./y(1)-alph*y(2);
dy(3)=y(4);
dy(4)=-alph*y(4)-2*y(2)*y(4)./y(1);
end

```

(以上是解微分方程的程序部分)

End

引力波模拟改动后程序:

```
function gravatationalworld
```

```
m=0.5;
```

```
G0=2.06;
```

```
b=0.5; (表示引力波幅度大小)
```

```
T=0.3; (表示引力波周期)
```

```
alphy=0.2;
```

```
v1=sqrt(m*G0);
```

```
k=0.8;
```

```
theta0=0;
```

```
v0=k*v1;
```

```
r0=0.45;
```

```
v01=0;
```

```
options = odeset('RelTol',1e-15,'AbsTol',[1e-15 1e-15 1e-15 1e-15]);
```

```
[T,Y]=ode45(@gravity,[0 5],[r0 v01 theta0/180*pi v0/r0],options);
```

```
figure
```

```
plot(T,Y(:,1),'b','linewidth',2)
```

```
xlabel('t(s)','FontSize',9)
```

```
ylabel('r(m)','FontSize',9)
```

```
set(gca, 'FontSize',9)
```

```
figure
```

```
plot(T,Y(:,3)/pi/2,'r','linewidth',2)
```

```
xlabel('t(秒)','FontSize',9)
```

```
ylabel('n(圈)','FontSize',9)
```

```
set(gca, 'FontSize',9)
```

```
figure
```

```
plot(Y(:,1).*cos(Y(:,3)),Y(:,1).*sin(Y(:,3)),'--','linewidth',2)
```

```
hold on
```

```
xlim([-0.5 0.5])
```

```
ylim([-0.5 0.5])
```

```
xlabel('x(m)')
```

```
ylabel('y(m)')
axis equal
set(gca, 'FontSize',9)
```

```
function dy = gravity( t,y )
G=G0*(b*cos(2*pi*t/T)+1); (添加周期函数模拟引力波)
dy=zeros(4,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=y(4).^2*y(1)-G*m./y(1)-alphy*y(2);
dy(3)=y(4);
dy(4)=-alphy*y(4)-2*y(2)*y(4)./y(1);
end

end
```

2021 S.-T. Yau High School Science Award